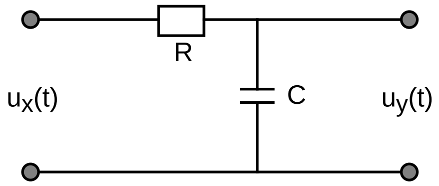
Übung 33 Diskretisierung von LTI-Systemen Impulsinvarianz, Differentialgleichung-Differenzengleichung

Lernziele

- ein zeitkontinuierliches LTI-System mit Hilfe der Methoden Impulsinvarianz und Näherung der Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung diskretisieren können.
- beurteilen können, ob ein Eingangs-Ausgangs-Signalpaar eines bestimmten LTI-Systems nach der Diskretisierung der beiden Signale und des Systems immer noch ein Eingangs-Ausgangs-Signalpaar bilden.

Aufgaben

Der RC-Stromkreis



bildet ein zeitkontinuierliches LTI-System mit dem folgenden Frequenzgang $H(\omega)$ (ohne Herleitung, vgl. Übung 18):

$$H(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$$

Der Input $u_x(t)$ und der Output $u_y(t)$ sind über die folgende Differentialgleichung verknüpft (Herleitung im Unterricht am Di 24.5.05):

$$RC\,\dot{u}_y + u_y = u_x$$

a) Bestimmen Sie den zum Input $x(t) = u_x(t) = \varepsilon(t)$ gehörigen Output $y(t) = u_y(t)$.

Nun wird das System diskretisiert.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des zeitdiskreten LTD-Systems.

i) Diskretisierung nach der Methode "Impulsinvarianz"

ii) Diskretisierung nach der Methode "Differentialgleichung-Differenzengleichung"

c) Betrachten Sie den folgenden Input $x(t)$ des ursprünglichen zeitkontinuierlichen LTI-Systems:

$$x(t) = u_x(t) := \varepsilon(t)$$

Diskretisiert man $x(t)$ und den dazugehörigen Output $y(t)$, so erhält man die zeitdiskreten Signale $x[n]$ und $y[n]$:

$$x[n] = x(nT)$$

$$y[n] = y(nT)$$

Beurteilen Sie, ob $y[n]$ immer noch der zum Input $x[n]$ gehörige Output des diskretisierten LTD-Systems ist.

i) Diskretisierung nach der Methode "Impulsinvarianz"

ii) Diskretisierung nach der Methode "Differentialgleichung-Differenzengleichung"

Hinweis: Prüfen Sie nach, ob $Y(z) = H(z)\cdot X(z)$ gilt.

Lösungen

a) $y(t) = \left(1 - e^{-t/RC}\right) \varepsilon(t)$

b) i) $H(z) = \frac{1}{RC} \frac{1}{1-e^{-T/RC}z^{-1}}$ $\quad |z| > e^{-T/RC}$

ii) $H(z) = \frac{T}{RC} \frac{1}{1 + \frac{T}{RC} - z^{-1}}$ $\quad |z| > \frac{1}{1 + \frac{T}{RC}}$

c) $x[n] = \varepsilon[n]$

$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ $\quad |z| > 1$

$y[n] = \left(1 - e^{-nT/RC}\right) \varepsilon[n]$

$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T/RC}z^{-1}}$ $\quad |z| > 1$

i) $H(z)\cdot X(z) = \frac{1}{RC} \frac{1}{1-e^{-T/RC}z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} \neq Y(z)$

ii) $H(z)\cdot X(z) = \frac{T}{RC} \frac{1}{1 + \frac{T}{RC} - z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} \neq Y(z)$