

Übung 26 Diskrete Fourier-Transformation (DFT) Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt bearbeiten können.
- den FFT-Algorithmus von Cooley und Tukey zur Bestimmung der diskreten Fourier-Transformierten eines zeitdiskreten Signales verstehen.
- das Signalflussdiagramm lesen können, welches den FFT-Butterfly-Algorithmus von Cooley und Tukey grafisch darstellt.

Aufgaben

Studieren Sie im Buch *Meyer* den Abschnitt 5.3.4 *Die schnelle Fourier-Transformation (FFT)* (Seiten 153 bis 157). Bearbeiten Sie parallel dazu die folgenden Aufgaben, wenn Sie bei der entsprechenden Textstelle angelangt sind.

Seite 154, Ende des ersten Absatzes ("... in diesem Falle sehr effizient programmieren."):

1. Die Blocklänge N einer Zeitsequenz $x[n]$ sei eine Zweierpotenz, d.h. $N = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$).
 $x[n]$ werde nun in einem ersten Schritt in zwei gleich lange Zeitsequenzen aufgeteilt. In einem zweiten Schritt werden die beiden Teilsequenzen wieder je in zwei gleich lange Sequenzen aufgeteilt, etc., bis die ursprüngliche Zeitsequenz $x[n]$ schliesslich in lauter Blöcke der Länge 2 aufgeteilt ist.
Wie viele Schritte sind insgesamt notwendig, um $x[n]$ auf diese Art in lauter Zweierblöcke aufzuteilen?
 - a) $N = 8 = 2^3$
 - b) allgemeines $N = 2^k$

Seite 154, nach der Herleitung $W_N^{k+N} = \dots = W_N^k$

2. Für $N := 8$ gibt es 8 mögliche komplexe Werte für W_8^{mn} .
Geben Sie diese 8 Zahlen sowohl analytisch als auch grafisch (in der komplexen Zahlenebene) an.

3. Beweisen Sie die folgende Beziehung:

$$W_N^k = W_{pN}^{pk} \quad (p \in \mathbb{N})$$

Seite 155, vor dem Absatz "Bei grossem N ist also eine wesentliche Einsparung möglich. Die beiden ..."

4. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung richtig ist, welche im oberen Teil der Seite 155 bei der Umformung von $A[m]$ bzw. $B[m]$ verwendet wird:

$$W_P^{mn} = W_N^{2mn}$$

5. Bestimmen Sie die Anzahl Multiplikationen, die ausgeführt werden müssen, wenn man $X[m]$ gemäss der Formel (5.3.-20) berechnet.

Seite 155, vor dem letzten Absatz ("Bild 5.3.-3 zeigt die Aufteilung der Abtastwerte für ...")

6. In der Aufgabe 5 haben Sie bestimmt, wieviele Multiplikationen bei der Berechnung der $N = 2^k$ ($k \leq N$) Werte von $X[m]$ nach **einem** Aufteilungsschritt noch nötig sind.

Bestimmen Sie die Anzahl nötiger Multiplikationen

- a) nach **zwei** Aufteilungsschritten.
 - b) nach **drei** Aufteilungsschritten.
 - c) nach allen **$k - 1$** Aufteilungsschritten.
7. Die FFT-Spalte der Tabelle 5.3.-1 enthält falsche Zahlen.
Bestimmen Sie die richtige Anzahl Multiplikationen in der FFT für alle vorgegebenen Werte von N . Benützen Sie dazu das Ergebnis aus der Aufgabe 6 c).
8. Führen Sie den auf den Seiten 154 und 155 erläuterten FFT-Algorithmus konkret durch. Das Ziel besteht darin, $X[m]$ auszudrücken durch einen Term, welcher nur noch die Abtastwerte $x[n]$ ($n = 0, \dots, N-1$) und den "twiddle factor" W_N enthält.
- a) $N = 4$
 - b) $N = 8$

Seite 157, am Schluss des Abschnittes 5.3.4

9. Versuchen Sie zu verstehen, wie man ein Signalflussdiagramm für die FFT gemäss den Bildern 5.3.-4 ($N = 2$) und 5.3.-5 ($N = 8$) liest.
Lesen Sie aus dem Bild 5.3.-5 den Wert für $X[5]$ heraus, und vergleichen Sie mit dem Resultat aus der Aufgabe 8 b).

Lösungen

1. a) Anzahl Schritte = 2
b) Anzahl Schritte = $k - 1 = \log_2(N) - 1$
2. $W_8^0 = (e^{-j(2/8)})^0 = (e^{-j(1/4)})^0 = 1$
 $W_8^1 = (e^{-j(2/8)})^1 = (e^{-j(1/4)})^1 = e^{-j(1/4)}$
 $W_8^2 = (e^{-j(2/8)})^2 = (e^{-j(1/4)})^2 = e^{-j(1/2)} = -j$
 $W_8^3 = (e^{-j(2/8)})^3 = (e^{-j(1/4)})^3 = e^{-j(3/4)}$
 $W_8^4 = (e^{-j(2/8)})^4 = (e^{-j(1/4)})^4 = e^{-j} = -1$
 $W_8^5 = (e^{-j(2/8)})^5 = (e^{-j(1/4)})^5 = e^{-j(5/4)}$
 $W_8^6 = (e^{-j(2/8)})^6 = (e^{-j(1/4)})^6 = e^{-j(3/2)} = j$
 $W_8^7 = (e^{-j(2/8)})^7 = (e^{-j(1/4)})^7 = e^{-j(7/4)}$
3. $W_{pN}^{pk} = (e^{-j(2/pN)})^{pk} = e^{-j(2/pN)pk} = e^{-j(2/N)k} = W_N^k$
4. $W_{P^{mn}} = W_{N/2}^{mn} = W_{2(N/2)}^{2(mn)}$ (siehe Aufgabe 5) = W_N^{2mn}
5.

Summe für A[m] erfordert N/2 Multiplikationen	}	$\frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2}$ Multiplikationen
A[m] besteht aus N/2 Werten		

B[m] (analog)	}	$\frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2}$ Multiplikationen
---------------	---	--

Multiplikation zwischen W_N^m und B[m] in (5.3.-20)
X[m] besteht aus N Werten N Multiplikationen

$$\frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2} + \frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2} + N = \frac{N^2}{2} + N \text{ Multiplikationen}$$
6. a) Die je $\frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2}$ Multiplikationen für A[m] und B[m] können je reduziert werden auf $\frac{N}{4} \cdot \frac{N}{4} + \frac{N}{4} \cdot \frac{N}{4} + \frac{N}{2}$ Multiplikationen.
 $2 \cdot \left(\frac{N}{4} \cdot \frac{N}{4} + \frac{N}{4} \cdot \frac{N}{4} + \frac{N}{2} \right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N$ Multiplikationen
- b) (analog wie in a))
 $2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{N}{8} \cdot \frac{N}{8} + \frac{N}{8} \cdot \frac{N}{8} + \frac{N}{4} \right) + \frac{N}{2} + N = \frac{N^2}{8} + 3N$ Multiplikationen
- c) (analog)
 $\frac{N^2}{2^{k-1}} + (k-1)N = N(\log_2(N) + 1)$ Multiplikationen

Blocklänge N	Anzahl Multiplikationen N^2 (DFT)	$N(\log_2(N) + 1)$ (FFT)
8	64	32
32	1'024	192
128	16'384	1'024
256	65'536	2'304
512	262'144	5'120
1'024	1'048'576	11'264
2'048	4'194'304	24'576
4'096	16'777'216	53'248

8. (siehe Seite 3)

8. a) nach dem 1. und einzigen Aufteilungsschritt:

$$\begin{aligned} X[m] &= A[m] + W_4^m \cdot B[m] \\ &= (a[0] \cdot W_4^{2m0} + a[1] \cdot W_4^{2m1}) + W_4^m \cdot (b[0] \cdot W_4^{2m0} + b[1] \cdot W_4^{2m1}) \\ &= (x[0] \cdot W_4^{2m0} + x[2] \cdot W_4^{2m1}) + W_4^m \cdot (x[1] \cdot W_4^{2m0} + x[3] \cdot W_4^{2m1}) \\ &= (x[0] + x[2] \cdot W_4^{2m}) + W_4^m \cdot (x[1] + x[3] \cdot W_4^{2m}) \end{aligned}$$

- b) nach dem 1. Aufteilungsschritt:

$$X[m] = A[m] + W_8^m \cdot B[m]$$

nach dem 2. Aufteilungsschritt:

$$\begin{aligned} X[m] &= (\dots + W_4^m \cdot \dots) + W_8^m \cdot (\dots + W_4^m \cdot \dots) \\ &= \left((x[0] \cdot W_4^{2m0} + x[4] \cdot W_4^{2m1}) + W_4^m \cdot (x[2] \cdot W_4^{2m0} + x[6] \cdot W_4^{2m1}) \right) \\ &\quad + W_8^m \cdot \left((x[1] \cdot W_4^{2m0} + x[5] \cdot W_4^{2m1}) + W_4^m \cdot (x[3] \cdot W_4^{2m0} + x[7] \cdot W_4^{2m1}) \right) \\ &= \left((x[0] + x[4] \cdot W_2^m) + W_4^m \cdot (x[2] + x[6] \cdot W_2^m) \right) \\ &\quad + W_8^m \cdot \left((x[1] + x[5] \cdot W_2^m) + W_4^m \cdot (x[3] + x[7] \cdot W_2^m) \right) \\ &= \left((x[0] + x[4] \cdot W_8^{4m}) + W_8^{2m} \cdot (x[2] + x[6] \cdot W_8^{4m}) \right) \\ &\quad + W_8^m \cdot \left((x[1] + x[5] \cdot W_8^{4m}) + W_8^{2m} \cdot (x[3] + x[7] \cdot W_8^{4m}) \right) \end{aligned}$$

9. aus Bild 5.3.-5:

$$\begin{aligned} X[5] &= \dots + W_8^5 \cdot \dots \\ &= (\dots + W_8^2 \cdot \dots) + W_8^5 \cdot (\dots + W_8^2 \cdot \dots) \\ &= \left((x[0] + W_8^4 \cdot x[4]) + W_8^2 \cdot (x[2] + W_8^4 \cdot x[6]) \right) \\ &\quad + W_8^5 \cdot \left((x[1] + W_8^4 \cdot x[5]) + W_8^2 \cdot (x[3] + W_8^4 \cdot x[7]) \right) \\ &= x[0] + W_8^4 \cdot x[4] + W_8^2 \cdot x[2] + W_8^2 \cdot W_8^4 \cdot x[6] \\ &\quad + W_8^5 \cdot x[1] + W_8^5 \cdot W_8^4 \cdot x[5] + W_8^5 \cdot W_8^2 \cdot x[3] + W_8^5 \cdot W_8^2 \cdot W_8^4 \cdot x[7] \end{aligned}$$

aus Aufgabe 8 b):

$$\begin{aligned} X[5] &= \left((x[0] + x[4] \cdot W_8^{4 \cdot 5}) + W_8^{2 \cdot 5} \cdot (x[2] + x[6] \cdot W_8^{4 \cdot 5}) \right) \\ &\quad + W_8^5 \cdot \left((x[1] + x[5] \cdot W_8^{4 \cdot 5}) + W_8^{2 \cdot 5} \cdot (x[3] + x[7] \cdot W_8^{4 \cdot 5}) \right) \\ &= x[0] + W_8^{20} \cdot x[4] + W_8^{10} \cdot x[2] + W_8^{10} \cdot W_8^{20} \cdot x[6] \\ &\quad + W_8^5 \cdot x[1] + W_8^5 \cdot W_8^{20} \cdot x[5] + W_8^5 \cdot W_8^{10} \cdot x[3] + W_8^5 \cdot W_8^{10} \cdot W_8^{20} \cdot x[7] \end{aligned}$$

Die beiden Ausdrücke sind wegen $W_8^{10} = W_8^2$ und $W_8^{20} = W_8^4$ identisch.

$$\begin{aligned} W_8^{10} &= e^{-j(2/8)10} = e^{-j(4/4)10} = e^{-j/2} = -j & W_8^{10} &= W_8^2 \\ W_8^2 &= e^{-j(2/8)2} = e^{-j(4/4)2} = e^{-j/2} = -j \end{aligned}$$