Übung 25 Diskrete Fourier-Transformation (DFT) Informationsgehalt der DFT, Zusammenhang DFT-FR

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- wissen und verstehen, wieviel Information in der diskreten Fourier-Transformierten einer zeitdiskreten Funktion enthalten ist.
- den Zusammenhang zwischen der diskreten Fourier-Transformierten einer zeitdiskreten Funktion und den Fourier-Koeffizienten der dazugehörigen periodisch fortgesetzten Abtastfunktion verstehen.
- verstehen, wie weit die diskrete Fourier-Transformierte einer zeitdiskreten Funktion den Fourier-Koeffizienten einer periodischen, zeitkontinuierlichen Funktion entsprechen.

Aufgaben

Informationsgehalt der DFT

1. Zur Bestimmung der diskreten Fourier-Transformierten X[m] einer zeitdiskreten, reellen Funktion x[n] werden die N reellen Funktionswerte x[0], x[1], ... , x[N-1] verwendet.

   Diese N Funktionswerte enthalten N voneinander unabhängige Informationen über die Funktion x[n]. Demzufolge kann die Transformierte X[m] höchstens N voneinander unabhängige Informationen über x[n] enthalten.

   Tatsächlich gibt es Abhängigkeiten zwischen den unendlich vielen DFT-Werten X[0], X[1], X[-1], X[2], X[-2], ... Diese Abhängigkeiten bewirken, dass die Transformierte X[m] letztlich aus genau N voneinander unabhängigen reellen Werten, und damit aus **genau N voneinander unabhängigen Informationen** über x[n] besteht.

   a) Prüfen Sie im Buch *Meyer* die Herleitung der folgenden Beziehungen nach.

      i) $X[m+N] = X[m]$ (Formel (5.3.-10), Seite 151)

      ii) $X[N-m] = \big(X[m]\big)^*$ (Formel (5.3.-11), Seite 151)

   b) Prüfen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen nach.

      i) X[0] ist eine reelle Zahl.

      ii) Wenn N gerade ist, dann ist $X\left[\frac{N}{2}\right]$ eine reelle Zahl.

   c) Prüfen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen nach.
      Benützen Sie dazu die Beziehungen aus a) und die Aussagen aus b).

      i) Für N = 7 ist die ganze Transformierte X[m] durch die folgenden 7 reellen Werte festgelegt:
      $X[0],\ |X[1]|,\ \arg(X[1]),\ |X[2]|,\ \arg(X[2]),\ |X[3]|,\ \arg(X[3])$

      ii) Für N = 6 ist die ganze Transformierte X[m] durch die folgenden 6 reellen Werte festgelegt:
      $X[0],\ |X[1]|,\ \arg(X[1]),\ |X[2]|,\ \arg(X[2]),\ X[3]$

      iii) * Für ein beliebiges **ungerades N** ist die ganze Transformierte X[m] durch die folgenden N reellen Werte festgelegt:
      $X[0],\ |X[1]|,\ \arg(X[1]),\ \dots,\ \left|X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right|,\ \arg\left(X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right)$

      iv) * Für ein beliebiges **gerades N** ist die ganze Transformierte X[m] durch die folgenden N reellen Werte festgelegt:
      $X[0],\ |X[1]|,\ \arg(X[1]),\ \dots,\ \left|X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right|,\ \arg\left(X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right),\ X\left[\frac{N}{2}\right]$

Zusammenhang DFT - FR

2. Gegeben ist die zeitkontinuierliche Funktion $x(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$

a) Skizzieren Sie für allgemeines T und N die Grafen der folgenden, auf dem Theorieblatt definierten Funktionen:

$x(t)$	$x_N(t)$	$\tilde{x}_N(t)$
$x_a(t)$	$x_{N,a}(t)$	$\tilde{x}_{N,a}(t)$
$x[n]$	$x_N[n]$	$\tilde{x}_N[n]$

b) Bestimmen Sie

i) die Fourier-Transformierte $X_{N,a}(\omega)$ von $x_{N,a}(t)$ bzw. $x_N[n]$.

ii) die Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$.

Hinweis: $c_{a,m}$ sind Abtastwerte von $X_{N,a}(\omega)$

iii) die diskrete Fourier-Transformierte $X[m]$ von $x[n]$.

iv) Vergleichen Sie ii) mit iii), und stellen Sie fest, dass gilt:

$$c_{a,m} = \frac{1}{NT} X[m]$$

c) Studieren Sie das MAPLE-File dft.mws. Sie finden es unter
http://www.tel.fh-htwchur.ch/˜borer → Mathematik → Unterlagen (...)

i) Betrachten Sie die Grafen der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ von $x(t)$ und der Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ von $x_a(t)$.
Stellen Sie dabei fest, dass $X_a(\omega)$ eine periodische Fortsetzung von $X(\omega)$ ist.

ii) Betrachten Sie die Grafen der Fourier-Transformierten $X_N(\omega)$ von $x_N(t)$ und der Fourier-Transformierten $X_{N,a}(\omega)$ von $x_{N,a}(t)$.
Stellen Sie dabei fest, dass $X_{N,a}(\omega)$ eine periodische Fortsetzung von $X_N(\omega)$ ist.

iii) Vergleichen Sie die diskrete Fourier-Transformierte $X[m]$ von $x[n]$ mit den Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$, und stellen Sie fest, dass gilt:

$$c_{a,m} = \frac{1}{NT} X[m]$$

Variieren Sie die Abtastperiode T und die Länge N des Zeitfensters, und beurteilen Sie jeweils, wie gut das Abtasttheorem erfüllt ist.

3. Im Unterricht wurde hergeleitet, dass die Werte der diskreten Fourier-Transformierten $X[m]$ der Funktion $x[n]$ bis auf eine multiplikative Konstante NT gerade die Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$ sind:

$$c_{a,m} = \frac{1}{NT} X[m]$$

Sie sollen in dieser Aufgabe zeigen, dass **unter Einhaltung des Abtasttheorems** die folgenden drei Aussagen richtig sind:

(1) Die Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$ sind bis auf eine multiplikative Konstante T gerade die Fourier-Koeffizienten c_m der Funktion $\tilde{x}_N(t)$:

$$c_{a,m} = \frac{1}{T} c_m$$

(2) Die Werte der diskreten Fourier-Transformierten $X[m]$ der Funktion $x[n]$ sind bis auf eine multiplikative Konstante N gerade die Fourier-Koeffizienten c_m der Funktion $\tilde{x}_N(t)$:

$$c_m = \frac{1}{N} X[m]$$

(3) (siehe Seite 3)

(3) Wird eine periodische Funktion x(t) der Grundperiode T_0 so abgetastet und gefenstert, dass die Fensterlänge NT gerade gleich T_0 beträgt, so sind die Werte der diskreten Fourier-Transformierten X[m] bis auf eine multiplikative Konstante N die Fourier-Koeffizienten c_m der Funktion x(t).

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

a) Skizzieren Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $\tilde{X}_N(\omega)$ von $\tilde{x}_N(t)$.
Nehmen Sie dabei an, dass das Frequenzspektrum $\tilde{X}_N(\omega)$ begrenzt sei.

b) Skizzieren Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$.
Nehmen Sie dabei an, dass beim Übergang $\tilde{x}_N(t) \to \tilde{x}_{N,a}(t)$ das Abtasttheorem eingehalten werde.

c) Die Grafen von $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ und $\tilde{X}_N(\omega)$ bestehen je aus einer Linearkombination von δ-Funktionen. Vergleichen Sie die "Gewichte" der δ-Peaks in $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ und $\tilde{X}_N(\omega)$, und zeigen Sie, dass daraus die Aussage (1) folgt.

d) Zeigen, Sie dass aus dem im Unterricht hergeleiteten Zusammenhang zwischen $c_{a,m}$ und X[m] zusammen mit der Aussage (1) die Aussage (2) folgt.

e) Zeigen Sie, dass aus den Erkenntnissen der Aufgaben a) bis d) die Aussage (3) folgt.

Lösungen

1. a) i) ...
ii) ...

b) i) ...
ii) ...

c) i) ...
ii) ...
iii) * ...
iv) * ...

2. a) ...

b) i) $X_{N,a}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N[n]\, e^{-jn\omega T} = \ldots = \frac{1 - \left(e^{-T}e^{-j\omega T}\right)^N}{1 - e^{-T}e^{-j\omega T}}$

ii) $T_0 = NT$ = Grundperiode von $\tilde{x}_{N,a}(t)$, $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

$c_{a,m} = \frac{1}{T_0} X_{N,a}(m\omega_0) = \ldots = \frac{1}{NT} \frac{1 - e^{-NT}}{1 - e^{-T}e^{-j2\pi m/N}}$

iii) $X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi mn/N} = \ldots = \frac{1 - e^{-NT}}{1 - e^{-T}e^{-j2\pi m/N}}$

iv) ...

c) i) ...
ii) ...
iii) ...

3. a) $\tilde{X}_N(\omega)$ ist eine Linearkombination von δ-Funktionen an den Stellen $\omega = m \cdot \frac{2\pi}{T_0}$ $(m \;\; Z)$.

b) $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ geht aus $\tilde{X}_N(\omega)$ hervor durch eine periodische Fortsetzung mit der Grundperiode $\frac{2\pi}{T}$ und einer Gewichtung mit dem Faktor $\frac{1}{T}$

c) Die "Gewichte" der δ-Peaks in $\tilde{X}_N(\omega)$ betragen $2\pi \cdot c_m$
Die "Gewichte" der δ-Peaks in $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ betragen einerseits $2\pi \cdot c_{a,m}$. Wegen der periodischen Fortsetzung und Gewichtung von $\tilde{X}_N(\omega)$ betragen sie andererseits $\frac{1}{T} \cdot 2\pi \cdot c_m$

$$2\pi \cdot c_{a,m} = \frac{1}{T} \cdot 2\pi \cdot c_m$$

$$c_{a,m} = \frac{1}{T} c_m \qquad (1)$$

d) ...

e) Wird x(t) so abgetastet und gefenstert, dass $NT = T_0$, dann folgt $x(t) = \tilde{x}_N(t)$, und aus (2) folgt (3).