Übung 24 Periodische Fortsetzung
Faltung mit Deltafolge, Fourier-Koeff. einer period. fortges. Funktion

Lernziele

- verstehen, dass eine Funktion sowohl durch Aufaddieren zeitverschobener Versionen der Funktion als auch durch Faltung mit einer Deltafolge periodisch fortgesetzt werden kann.
- verstehen, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten einer periodisch fortgesetzten Funktion Abtastwerte der Fourier-Transformierten der ursprünglichen Funktion sind.
- die komplexen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion bestimmen, welche durch periodisches Fortsetzen einer aperiodischen Funktion gebildet wurde.

Einleitung

Eine Funktion $x_0(t)$ wird mit der Grundperiode T_0 periodisch fortgesetzt, indem Teilfunktionen $x_0(t\text{-}kT_0)$ (k Z), welche man durch entsprechende Zeitverschiebungen von $x_0(t)$ gewinnt, aufaddiert werden. Man erhält so die periodische Funktion x(t):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t-kT_0) \qquad (1)$$

Die periodische Fortsetzung von $x_0(t)$ kann auch durch eine Faltung von $x_0(t)$ mit einer Deltafolge erreicht werden:

$$x(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0) \qquad (2)$$

Aufgaben

Faltung mit Deltafolge

1. a) Skizzieren Sie untereinander die Grafen der folgenden Funktionen:

   i) beliebige, periodisch fortzusetzende Funktion $x_0(t)$.

   ii) Deltafolge $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0)$

   iii) periodisch fortgesetzte Funktion x(t).

   b) Zeigen Sie, dass die rechten Seiten der Beziehungen (1) und (2) identisch sind.

   Hinweis:
   Führen Sie die Faltung in (2) im Zeitbereich aus.

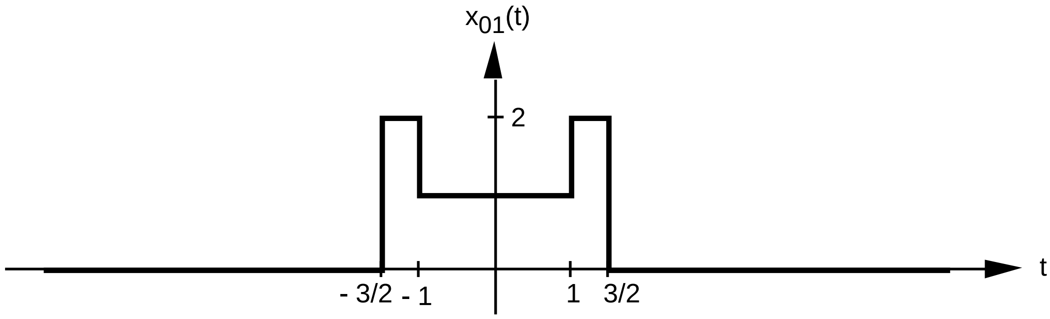
Fourier-Koeffizienten einer periodisch fortgesetzten Funktion

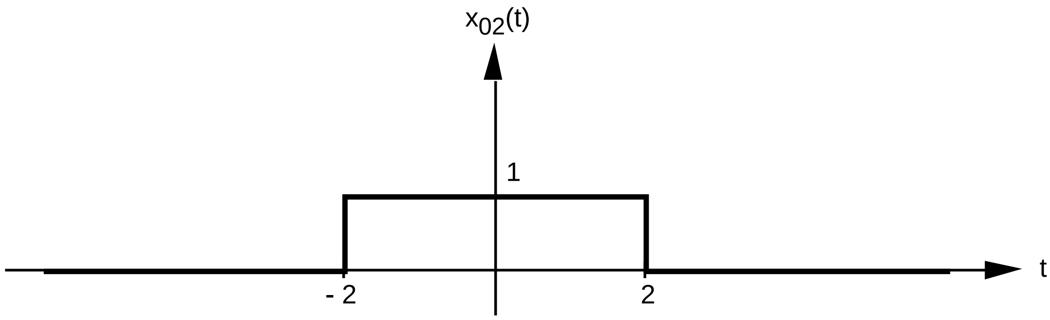
2. Im Unterricht wurde bewiesen, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k von x(t) Abtastwerte der Fourier-Transformierten $X_0(\omega)$ von $x_0(t)$ sind:

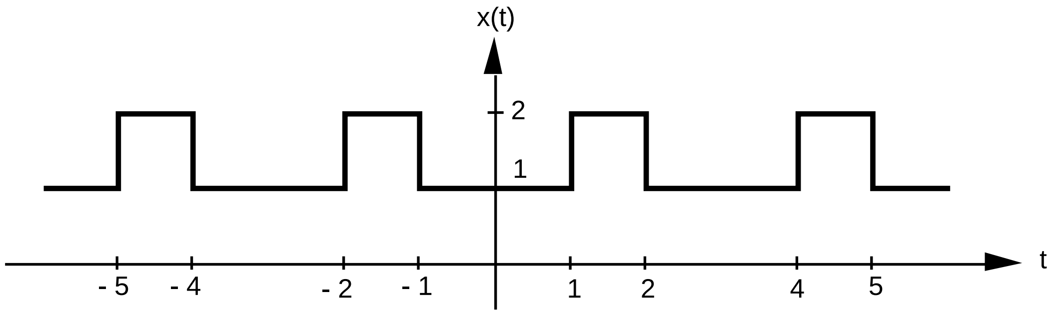
$$c_k = \frac{1}{T_0} X_0(k\omega_0) \qquad (3)$$

   Die Beziehung (3) gilt unabhängig davon, ob sich die Teilfunktionen $x_0(t\text{-}kT_0)$ (k Z) "überlappen" oder nicht.

Betrachten Sie nun die Grafen der Funktionen $x_{01}(t)$, $x_{02}(t)$ und $x(t)$:



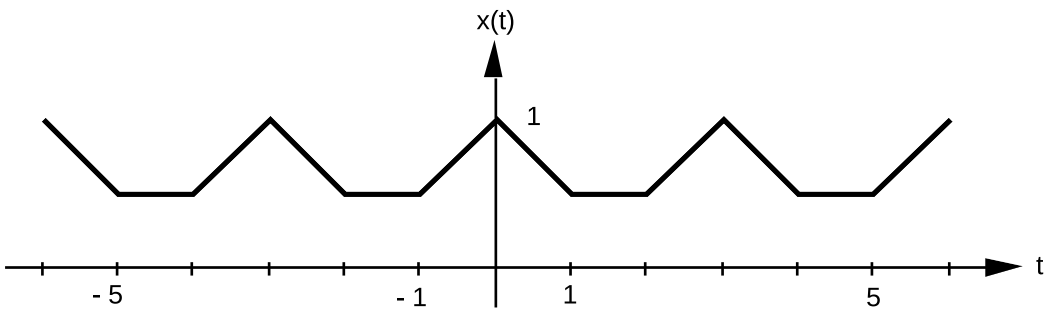




a) Prüfen Sie nach, dass $x(t)$ eine periodische Fortsetzung sowohl von $x_{01}(t)$ ("ohne Überlappung") als auch von $x_{02}(t)$ ("mit Überlappung") ist.

b) Prüfen Sie nach, dass die Beziehung (3) für beide Funktionen $x_{01}(t)$ und $x_{02}(t)$ gilt.

3. Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion $x(t)$:



a) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) von $x(t)$.
Drücken Sie c_k allgemein in Abhängigkeit von k aus.

b) Bestimmen Sie alle k Z, für welche gilt: $c_k = 0$

Lösungen

1. a) i) ...
   ii) ...
   iii) ...

   b) ...

2. a) ... $(T_0 = 3)$

   b) $$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2} x(t)\cdot e^{-jk(2\pi/3)t}\,dt = \begin{cases} -\dfrac{\sin\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right)}{k\pi} & (k\neq 0)\\[2ex] \dfrac{4}{3} & (k=0)\end{cases}$$

   $x_{01}(t)$: $$X_{01}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{4\sin\left(\frac{3}{2}\,\omega\right) - 2\sin(\omega)}{\omega} & (\omega\neq 0)\\[2ex] 4 & (\omega=0)\end{cases}$$

   $$\frac{1}{T_0}X_{01}(k\omega_0) = \frac{1}{3}X_{01}\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right) = \left.\begin{cases} -\dfrac{\sin\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right)}{k\pi} & (k\neq 0)\\[2ex] \dfrac{4}{3} & (k=0)\end{cases}\right\} = c_k$$

   $x_{02}(t)$: $$X_{02}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(2\omega)}{\omega} & (\omega\neq 0)\\[2ex] 4 & (\omega=0)\end{cases}$$

   $$\frac{1}{T_0}X_{02}(k\omega_0) = \frac{1}{3}X_{02}\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right) = \left.\begin{cases} \dfrac{\sin\left(k\,\frac{4\pi}{3}\right)}{k\pi} & (k\neq 0)\\[2ex] \dfrac{4}{3} & (k=0)\end{cases}\right\} = c_k$$

   Bem.: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt
   $$\sin\left(k\,\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

3. a) $$c_k = \frac{2}{3}\,\mathrm{sinc}^2\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\sin^2\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right)}{\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right)^2} & (k\neq 0)\\[2ex] \dfrac{2}{3} & (k=0)\end{cases}$$

   b) k = ... , -12, -9, -6, -3, 3, 6, 9, 12, ...