

## Übung 21 Fourier-Transformation für Abtastsignale (FTA) Periodizität, Bestimmung der Fourier-Transformierten

### Lernziele

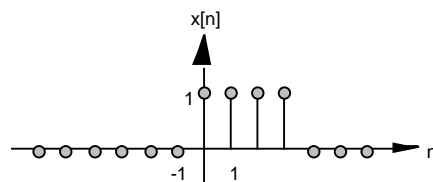
- verstehen, dass das Spektrum einer abgetasteten Funktion periodisch ist.
- verstehen, wie die Grundperiode des Spektrums einer abgetasteten Funktion von der Abtastperiode abhängt.
- den Zusammenhang zwischen dem Spektrum einer abgetasteten Funktion und dem Spektrum der ursprünglichen, unabgetasteten Funktion verstehen.
- die Fourier-Transformierte einer einfacheren zeitdiskreten Funktion von Hand bestimmen können.

### Aufgaben

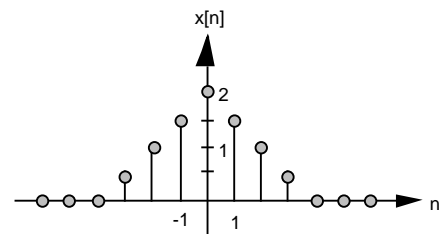
1. Die Formel (5.2.-9) (*Meyer*, Seite 139) gibt den Zusammenhang zwischen dem Spektrum  $X(\omega)$  der zeitkontinuierlichen Funktion  $x(t)$  und dem Spektrum  $X_a(\omega)$  der abgetasteten Funktion  $x_a(t)$  bzw. der zeitdiskreten Funktion  $x[n]$  an.
  - a) Veranschaulichen Sie sich die Formel (5.2.-9), indem Sie die Grafen von  $X(\omega)$  und  $X_a(\omega)$  skizzieren und vergleichen.
  - b) Prüfen Sie anhand der Grafen von  $X(\omega)$  und  $X_a(\omega)$  die folgende Aussage nach (Seite 139): "*Wird ein **Signal abgetastet**, so wird sein **Spektrum periodisch fortgesetzt** mit der Abtastfrequenz  $f_a$  und gewichtet mit der Abtastperiode  $T$ .*"
  - c) Studieren Sie die Herleitung von (5.2.-9), d.h. die untersten zwei Zeilen auf der Seite 138. Führen Sie insbesondere die Faltung im letzten Ausdruck zuunsterst auf der Seite 138 aus, um auf den Ausdruck auf der rechten Seite in (5.2.-9) zu kommen. (Druckfehler im Buch: Statt  $\omega_0$  sollte es  $\omega_a$  heissen.)

2. Bestimmen Sie von Hand die Fourier-Transformierte  $X_a(\omega)$  der zeitdiskreten Funktion  $x[n]$ :

a)



b)



- c)  $x[n] = e^{-nT}$   $[n]$ ,  $T =$  Abtastperiode

3. \* Die Fourier-Transformierte  $X_a(\omega)$  einer zeitdiskreten Funktion  $x[n]$  ist im Allgemeinen gegeben durch

$$X_a(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega T} \quad (\text{Meyer, Formel (5.2.-3), Seite 137})$$

Diese Formel versagt jedoch, wenn die ursprüngliche zeitkontinuierliche Funktion  $x(t)$  **periodisch** ist. Die zeitdiskrete Funktion  $x[n]$  konvergiert dann für  $n \rightarrow \pm \infty$  nicht gegen 0, so dass die Summe nicht existiert.

Es ist trotzdem möglich, auch in diesem Fall eine Fourier-Transformierte  $X_a(\omega)$  zu bestimmen. Finden Sie einen Weg dazu.

**Lösungen**

1. a) ...  
 b) ...  
 c) Vorgehen für das Ausführen der Faltung:  
 - Faltungsintegral formulieren  
 - Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen  
 - Integrale mit Delta-Funktion im Integranden ausführen

2.  $T =$  Abtastperiode,  $f_a := \frac{2}{T} =$  Abtastfrequenz

a)  $X_a(\omega) = 1 + e^{j\omega T} + e^{-j2\omega T} + e^{-j3\omega T} = \frac{1 - e^{-j4\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}}$  ( $\omega = k \cdot \frac{2\pi}{T}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ )  
 ( $\omega = k \cdot \frac{2\pi}{T}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ )

b)  $X_a(\omega) = 2 + 3 \cos(\omega T) + 2 \cos(2\omega T) + \cos(3\omega T)$

c)  $X_a(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-(1+j)\omega T}}$

3. \* 1. Möglichkeit

$$X(\omega) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k \omega_0) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}, T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

$$X_a(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n \omega_a) = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k \omega_0 - n \omega_a)$$

2. Möglichkeit (falls  $x_a(t)$  periodisch mit der Grundfrequenz  $\omega_a$ )  
 Fourier-Reihe von  $x_a(t)$  mit den Fourier-Koeffizienten  $c_{ak}$ :

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ak} e^{jk \omega_a t}$$

$$X_a(\omega) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ak} \delta(\omega - k \omega_a)$$