

Übung 19 **Fourier-Transformation** **Modulation**

Lernziele

- das Spektrum eines modulierten Signals mit Hilfe der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation bestimmen können.
- verstehen, wie sich das Modulieren eines Signals mit einem periodischen Signal im Spektrum auswirkt.
- Spektren modulierter Signale ohne Berechnung grafisch skizzieren können.

Aufgaben

1. Ein beliebiges Signal $x(t)$ mit Spektrum $X(\omega)$ wird mit dem folgenden **cosinus-förmigen** Signal $m(t)$ moduliert:

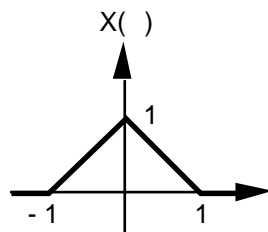
$$m(t) = \cos(\omega_0 t)$$

- Geben Sie das Spektrum $M(\omega)$ von $m(t)$ an.
 - Bestimmen Sie mit Hilfe der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation das Spektrum $X_m(\omega)$ des modulierten Signals $x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$.
 - Skizzieren Sie die Grafen von $X(\omega)$, $M(\omega)$ und $X_m(\omega)$. Wählen Sie für $X(\omega)$ einen beliebigen geeigneten Verlauf.
 - Erklären Sie in eigenen Worten, wie das Spektrum $X_m(\omega)$ aus dem Spektrum $X(\omega)$ hervorgeht, bzw. wie sich das Spektrum eines beliebigen Signals verändert, wenn man das Signal mit einem cosinus-förmigen Signal moduliert.
2. Ein beliebiges Signal $x(t)$ mit Spektrum $X(\omega)$ wird mit einem beliebigen **periodischen** Signal $m(t)$ moduliert.
 $m(t)$ kann durch seine komplexe Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk \omega_0 t}$$

- Geben Sie das Spektrum $M(\omega)$ von $m(t)$ an.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation das Spektrum $X_m(\omega)$ des modulierten Signals $x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$.
- Skizzieren Sie die Grafen von $X(\omega)$, $M(\omega)$ und $X_m(\omega)$. Wählen Sie für $X(\omega)$ einen beliebigen geeigneten Verlauf.
- Erklären Sie in eigenen Worten, wie das Spektrum $X_m(\omega)$ aus dem Spektrum $X(\omega)$ hervorgeht, bzw. wie sich das Spektrum eines beliebigen Signals verändert, wenn man das Signal mit einem beliebigen periodischen Signal moduliert.

3. Gegeben ist das Spektrum $X(\omega)$ des Signals $x(t)$:



Das Signal wird mit dem Signal $m(t)$ moduliert.

Bestimmen Sie den grafischen Verlauf des Spektrums des modulierten Signals $x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$.

a) $m(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

b) $m(t) = \cos(t)$

c) $m(t) = \delta(t-k)$
 $k \in \mathbb{R}$

d) $m(t) = \delta(t-2k)$
 $k \in \mathbb{R}$

4. Das Signal $x(t)$ wird mit dem Signal $m(t)$ moduliert:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$m(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < T_1) \\ 0 & (|t| > T_1) \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Grafen der Signale $x(t)$ und $m(t)$.

b) Skizzieren Sie die Spektren $X(\omega)$ und $M(\omega)$ der Signale $x(t)$ und $m(t)$.

c) Skizzieren Sie das Spektrum $X_m(\omega)$ des modulierten Signals $x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$.
 Sie sollen das Spektrum $X_m(\omega)$ **nicht berechnen** sondern direkt grafisch skizzieren, indem Sie Ihre Erkenntnisse aus den Aufgaben 1 bis 3 anwenden.

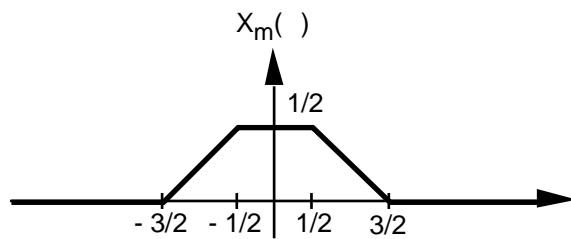
Lösungen

1. a) $M(\omega) = X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)$
 b) $X_m(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$
 c) ...
 d) ...

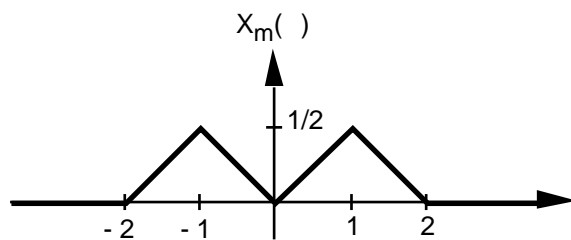
2. a) $M(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X(\omega - k\omega_0)$

- b) $X_m(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X(\omega - k\omega_0)$
 c) ...
 d) ...

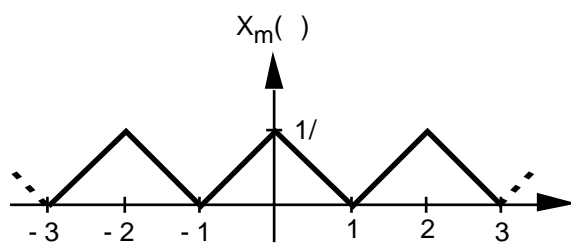
3. a)



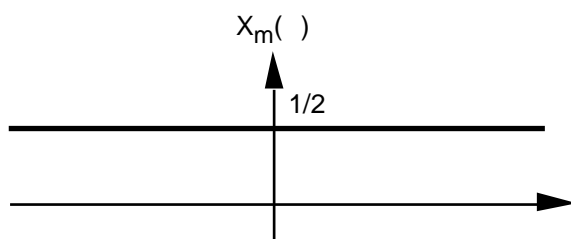
- b)



- c)



- d)



4. siehe Meyer Seite 45