Übung 15 Fourier-Transformation Symmetrie

Lernziele

- die grundlegende Symmetrieeigenschaft der Fourier-Transformierten einer reellen Funktion kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, dass der Betrag der Fourier-Transformierten einer reellen Funktion gerade ist.
- wissen und verstehen, dass das Argument der Fourier-Transformierten einer reellen Funktion ungerade ist.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.

Einleitung

Die Fourier-Transformierte einer reellen Funktion x(t) besitzt die folgenden Symmetrieeigenschaften:

(1) $X(-\omega) = \left(X(\omega)\right)^*$

(2) $|X(\omega)|$ gerade
(3) $\arg\left(X(\omega)\right)$ ungerade

(4) x(t) gerade $X(\omega)$ reell $X(\omega)$ gerade
(5) x(t) ungerade $X(\omega)$ rein imaginär $X(\omega)$ ungerade

Im Unterricht wurde die Symmetrieeigenschaft (1) bewiesen.

Aufgaben

1. Prüfen Sie die Symmetrieeigenschaften (1), (2) und (3) anhand der folgenden Funktion x(t) und ihrer Fourier-Transformierten $X(\omega)$ nach:

$$x(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t) \quad (a>0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

2. Prüfen Sie die Symmetrieeigenschaft (4) am Beispiel der folgenden beiden geraden Funktionen x(t) nach:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t|<T_1\right) \\ 0 & \left(|t|>T_1\right) \end{cases} \qquad (T_1>0)$$

$$x(t) = e^{-a|t|} \qquad (a>0)$$

Die Fourier-Transformierten $X(\omega)$ der beiden Funktionen haben Sie bereits in der Übung 11 bestimmt.

3. Zeigen Sie, dass die Symmetrieeigenschaften (2) und (3) aus der Symmetrieeigenschaft (1) folgen.

4. * Beweisen Sie die Symmetrieeigenschaft (4).

Vorgehen:

i) Zeigen Sie zuerst, dass $X(-\omega) = X(\omega)$ gilt, falls x(t) gerade ist.
Formen Sie dazu das Integral für $X(-\omega)$ durch eine Substitution in das Integral für $X(\omega)$ um.

ii) Zeigen Sie, dass aus $X(-\omega) = X(\omega)$ und der Symmetrieeigenschaft (1) die zu beweisende Symmetrieeigenschaft (4) folgt.

Lösungen

1. (1) $X(-\omega) = \left(X(\omega)\right)^* = \frac{1}{a-j\omega}$

   (2) $|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ gerade

   (3) $\arg\left(X(\omega)\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$ ungerade

2. ...

3. a) ...
   b) ...
   c) ...

4. * ...