Übung 10 Komplexe Fourier-Reihe
Parseval'sche Beziehung, "Negative Frequenzen"

Lernziele

- einen neuen Sachverhalte analysieren können.
- mit Hilfe der Parseval'schen Beziehung mittlere Leistungen von einzelnen Fourier-Komponenten eines periodischen Signals bestimmen können.
- die Bedeutung der einzelnen Summanden in der komplexen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion verstehen.

Integraltabelle

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C \qquad (a\neq 0)$$

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C \qquad (a\neq 0)$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + C \qquad (|a| \neq |b|)$$

Aufgaben

1. Prüfen Sie die Parseval'sche Beziehung am Beispiel des folgenden periodischen Signals x(t) mit den komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) nach (vgl. Übung 9, Aufgabe 3a):

$$x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = \pm 1) \\ -\frac{j}{2} & (k = 2) \\ \frac{j}{2} & (k = -2) \\ 0 & (k \neq \pm 1, \pm 2) \end{cases}$$

2. Gegeben ist das periodische Signal x(t) und seine komplexen Fourier-Koeffizienten.

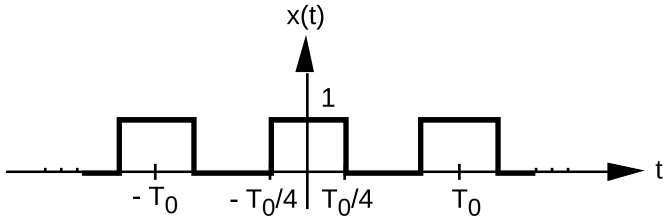
   Bestimmen Sie die mittlere Leistung
   i) des konstanten Anteils
   ii) der Grundschwingung
   im Verhältnis zur mittleren Leistung des ganzen Signals x(t).

   a) x(t) aus Aufgabe 1:

$$x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$$

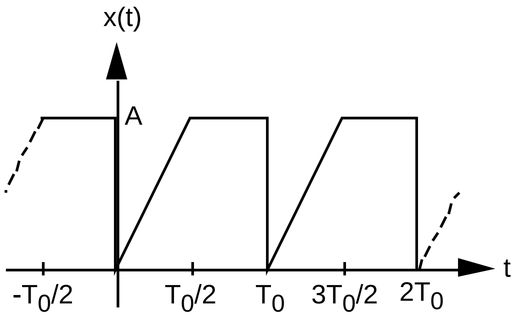
$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = \pm 1) \\ -\frac{j}{2} & (k = 2) \\ \frac{j}{2} & (k = -2) \\ 0 & (k \neq \pm 1, \pm 2) \end{cases}$$

b) x(t) aus Übung 9, Aufgabe 1a):



$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

c) x(t) aus Übung 9, Aufgabe 1c):



$$c_k = \begin{cases} \frac{3A}{4} & (k=0) \\ -\frac{A}{k^2\pi^2} + j\,\frac{A}{2k\pi} & (k\neq 0 \quad k \text{ ungerade}) \\ j\,\frac{A}{2k\pi} & (k\neq 0 \quad k \text{ gerade}) \end{cases}$$

3. Auf den Blättern "Fourier-Reihen-Tabelle" sind die reellen Fourier-Reihen spezieller Signale tabelliert.

Bearbeiten Sie für die verlangten Signale die folgenden Teilaufgaben:

i) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$).
ii) Stellen Sie das Spektrum $\{c_k\}$ der Funktion x(t) grafisch als Balkendiagramm dar.
iii) Bestimmen Sie die mittlere Leistung der Grundschwingung im Verhältnis zur mittleren Leistung des ganzen Signals x(t).

a) "4. Dreieckskurve" für $\hat{y} := 1$
b) "5. Kippschwingung" für $\hat{y} := 1$
c) "8. Sinusimpuls" für $\hat{y} := 1$

4. Ein Studienkollege stellt Ihnen die folgende Frage:

"In der komplexen Fourier-Reihe hat es Summanden $c_1 e^{j\omega_0 t}$, $c_2 e^{j2\omega_0 t}$, $c_3 e^{j3\omega_0 t}$, etc., die zu positiven Frequenzen ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, etc. gehören. Aber es hat auch Summanden $c_{-1} e^{-j\omega_0 t}$, $c_{-2} e^{-j2\omega_0 t}$, $c_{-3} e^{-j3\omega_0 t}$, welche zu negativen Frequenzen $-\omega_0$, $-2\omega_0$, $-3\omega_0$, etc. gehören. Ich verstehe, was eine positive Frequenz ist. Aber wie muss ich mir negative Frequenzen vorstellen?"

Geben Sie auf diese Frage eine korrekte und für Ihren Studienkollegen verständliche Antwort.

Lösungen

1. $$\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{(\pi/2)}|\cos(4t)+\sin(8t)|^2\,dt = 1$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_2|^2 + |c_{-2}|^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$$

2. a) i) Das Signal x(t) enthält keinen konstanten Anteil.

$$\frac{\overline{P}_0}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_0|^2}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2} = \frac{0}{1} = 0 = 0\ \%$$

ii) $$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\ \%$$

b) i) $$\frac{\overline{P}_0}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_0|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\ \%$$

ii) $$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{2}{\pi^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi^2} \approx 41\ \%$$

c) i) $$\frac{\overline{P}_0}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_0|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{9A^2}{16}}{\frac{2A^2}{3}} = \frac{27}{32} \approx 84\ \%$$

ii) $$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{A^2(4+\pi^2)}{2\pi^4}}{\frac{2A^2}{3}} = \frac{3(4+\pi^2)}{4\pi^4} \approx 11\ \%$$

3. a) i) $$c_k = \begin{cases} 0 & \text{(k gerade)} \\ -j\,\dfrac{4}{k^2\pi^2} & \text{(k = ..., -11, -7, -3, 1, 5, 9, ...)} \\ j\,\dfrac{4}{k^2\pi^2} & \text{(k = ..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, ...)} \end{cases}$$

ii) ...

iii) $$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{32}{\pi^4}}{\frac{1}{3}} = \frac{96}{\pi^4} \approx 99\ \%$$

b) (siehe Seite 4)

b) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0) \\ j\,\frac{1}{2k\pi} & (k \neq 0) \end{cases}$

ii) ...

iii) $$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} |x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{1}{2\pi^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2\pi^2} \approx 15\ \%$$

c) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (k = 0) \\ -j\,\frac{1}{4} & (k = 1) \\ j\,\frac{1}{4} & (k = -1) \\ 0 & (k \text{ ungerade} \quad k \neq \pm 1) \\ -\frac{1}{(k^2-1)\pi} & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$

ii) ...

iii) $$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} |x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\ \%$$

4. ...