

Übung 9 Komplexe Fourier-Reihe Komplexe Fourier-Koeffizienten, Reelle-Komplexe Fourier-Reihe

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion in die komplexe Fourier-Reihe umformen können und umgekehrt.
- die komplexen Fourier-Reihe einer Funktion, die aus einer Linearkombination trigonometrischer Funktionen besteht, direkt bestimmen können.
- das Spektrum einer periodischen Funktion als Balkendiagramm grafisch darstellen können.
- die Bedeutung der einzelnen Summanden der Fourier-Reihe verstehen.
- beurteilen können, wie sich die komplexen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion verändern, wenn man die Funktion skaliert.

Integraltabelle

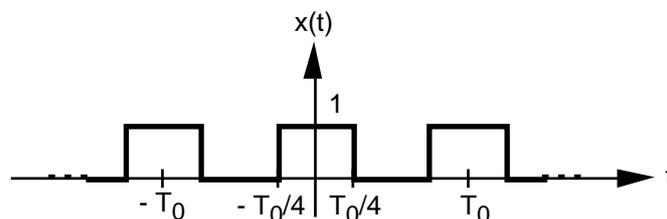
$$e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

$$x \cdot e^{ax} dx = \left(\frac{ax-1}{a^2} \right) e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

Aufgaben

1. Gegeben ist die periodische Funktion $x(t)$ und ihre reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$).
 - i) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$).
 - ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) direkt aus der Funktion $x(t)$.
 - iii) Schreiben Sie ein paar Glieder der komplexen Fourier-Reihe auf.

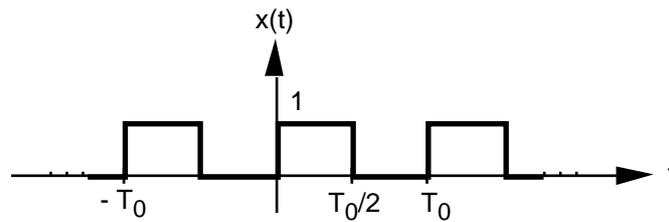
- a) $x(t)$ aus Übung 4, Aufgabe 2:



$$a_0 = \frac{1}{2}$$
$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k = 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{2}{k} & (k = 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$
$$b_k = 0$$

- b) (siehe Seite 2)

b)

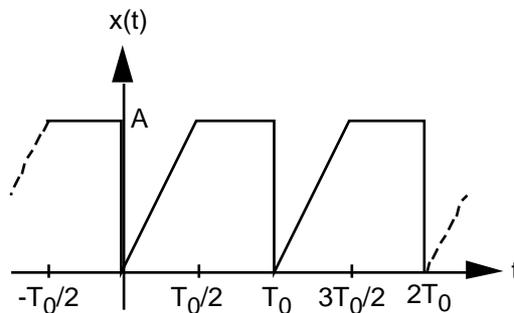


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

c) $x(t)$ aus Übung 4, Aufgabe 3:



$$a_0 = \frac{3A}{4}$$

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = -\frac{A}{k}$$

2. Zeigen Sie, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) einer periodischen, **reellen** Funktion $x(t)$ die folgenden Symmetrie-Eigenschaften besitzen:

a) $x(t)$ gerade $c_k \in \mathbb{R}$

b) $x(t)$ ungerade c_k rein imaginär

c) * $(|c_k| \text{ gerade in } k) \quad (\arg(c_k) \text{ ungerade in } k)$

Hinweise:

- Gehen Sie bei a) und b) von der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) aus (siehe Theorie-Blätter "Komplexe Fourier-Reihe").

Berücksichtigen Sie die Eigenschaften der reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$) einer geraden bzw. ungeraden Funktion.

- Benützen Sie bei c) die im Unterricht hergeleitete Symmetrie-Eigenschaft $c_{-k} = (c_k)^*$

3. (siehe Seite 3)

3. Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der nachstehenden Funktionen $x(t)$. Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- Bestimmen Sie T_0 und ω_0 .
- Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$).
- Stellen Sie das Spektrum $\{c_k\}$ der Funktion $x(t)$ grafisch als Balkendiagramm dar.

- a) $x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$
 b) $x(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$
 c) $x(t) = \cos(4t) + \sin(t)$
 d) $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)$

4. Eine periodische Funktion $x(t)$ mit der Grundperiode T_0 und der Grundfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T_0$ kann in eine reelle Fourier-Reihe oder in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt werden:

Reelle Fourier-Reihe:

$$(1) \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \omega_0 t)) \quad (a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R})$$

Komplexe Fourier-Reihe:

$$(2) \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk \omega_0 t} \quad (c_k \in \mathbb{C})$$

- a) Drücken Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) durch die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) aus und umgekehrt, d.h. formulieren Sie die beiden Zusammenhänge

$$\begin{aligned} (1) \quad (2) : & \quad a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N}) & \quad c_k (k \in \mathbb{Z}) \\ (2) \quad (1) : & \quad c_k (k \in \mathbb{Z}) & \quad a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Hinweis:

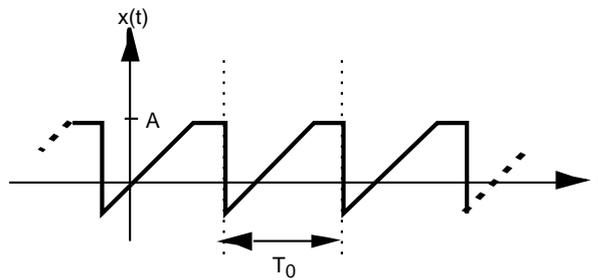
- Der Zusammenhang (1) \leftrightarrow (2) entspricht der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$).
- Der Zusammenhang (2) \leftrightarrow (1) ergibt sich durch Umformung des Zusammenhanges (1) \leftrightarrow (2).

- b) Vergleichen Sie die beiden Formen (1) und (2) der Fourier-Reihe wie folgt: Geben Sie an, welche Summanden sich in den Fourier-Reihen entsprechen, d.h. welche Summanden jeweils
- den konstanten Anteil
 - die Grundschiwingung bzw. die 1. Harmonische
 - die 2. Harmonische
 - die 3. Harmonische
 - die 7. Harmonische
 - die n. Harmonische
- in der Fourier-Analyse der Funktion $x(t)$ beschreiben.

5. (siehe Seite 4)

5. Wie in der Aufgabe 4 der Übung 7 sollen Sie in dieser Aufgabe beurteilen, wie sich eine Skalierung bzw. eine Zeitverschiebung einer periodischen Funktion $x(t)$ auf deren Fourier-Koeffizienten auswirkt.

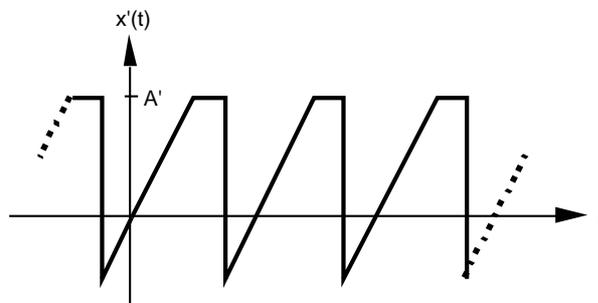
Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion $x(t)$:



Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) von $x(t)$ seien bekannt.

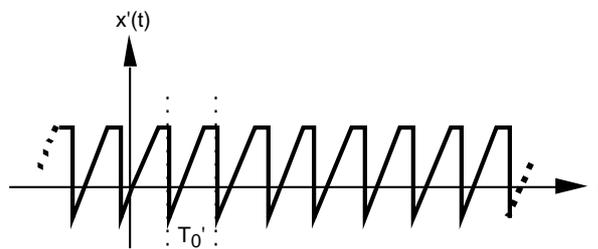
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, inwiefern sich die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k' ($k \in \mathbb{Z}$) von $x'(t)$ von den Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) von $x(t)$ unterscheiden.

a)



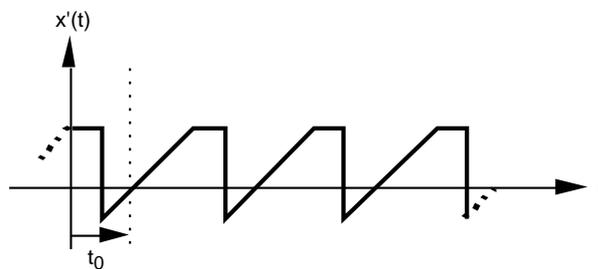
$x'(t)$ ist gegenüber $x(t)$ um den Faktor $r := \frac{A'}{A}$ skaliert, d.h. $x'(t) = r \cdot x(t)$

b)



$x'(t)$ ist gegenüber $x(t)$ zeitlich um den Faktor r skaliert bzw. "gestaucht", d.h. $T_0' = \frac{1}{r} T_0$

c)

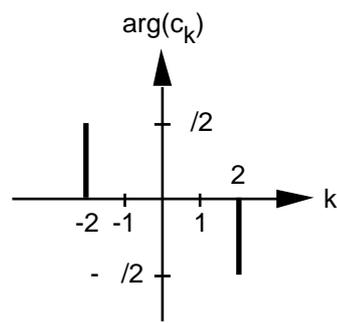
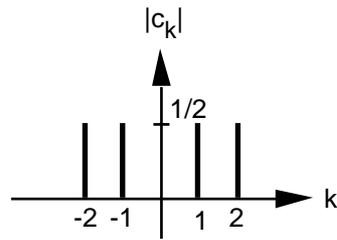


$x'(t)$ ist gegenüber $x(t)$ um t_0 zeitverschoben, d.h. $x'(t) = x(t-t_0)$

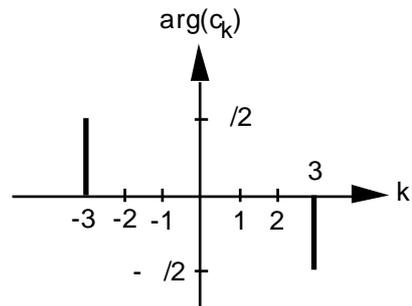
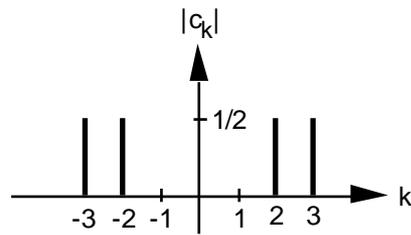
Lösungen

1. a) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k} & (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{1}{k} & (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$
- ii) siehe i)
- iii) $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} e^{j 0t} + \frac{1}{5} e^{-j 0t} - \frac{1}{3} e^{j3 0t} - \frac{1}{3} e^{-j3 0t} + \frac{1}{5} e^{j5 0t} + \frac{1}{5} e^{-j5 0t} + \dots$
- b) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ -j \frac{1}{k} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$
- ii) siehe i)
- iii) $x(t) = \frac{1}{2} - j \frac{1}{5} e^{j 0t} + j \frac{1}{5} e^{-j 0t} - j \frac{1}{3} e^{j3 0t} + j \frac{1}{3} e^{-j3 0t} - j \frac{1}{5} e^{j5 0t} + j \frac{1}{5} e^{-j5 0t} - \dots$
- c) $c_k = \begin{cases} \frac{3A}{4} & (k=0) \\ -\frac{A}{k^2} + j \frac{A}{2k} & (k \text{ ungerade}) \\ j \frac{A}{2k} & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$
- ii) siehe i)
- iii) $x(t) = \frac{3A}{4} + \left(-\frac{A}{2} + j \frac{A}{2}\right) e^{j 0t} + \left(-\frac{A}{2} - j \frac{A}{2}\right) e^{-j 0t} + j \frac{A}{4} e^{j2 0t} - j \frac{A}{4} e^{-j2 0t} + \left(-\frac{A}{9} + j \frac{A}{6}\right) e^{j3 0t} + \left(-\frac{A}{9} - j \frac{A}{6}\right) e^{-j3 0t} + j \frac{A}{8} e^{j4 0t} - j \frac{A}{8} e^{-j4 0t} + \dots$
2. $c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2} (a_k - j b_k) & (k > 0) \\ \frac{1}{2} (a_{-k} + j b_{-k}) & (k < 0) \end{cases}$
- a) x(t) gerade $b_k = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2} a_k & (k > 0) \\ \frac{1}{2} a_{-k} & (k < 0) \end{cases} \quad \mathbb{R}$
- b) x(t) ungerade $a_0 = 0 \quad a_k = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $c_k = \begin{cases} 0 & (k=0) \\ -j \frac{1}{2} b_k & (k > 0) \\ j \frac{1}{2} b_{-k} & (k < 0) \end{cases} \quad \text{rein imaginär}$
- c) * ...
3. (siehe Seite 6)

3. a) $T_0 = \frac{1}{2}$, $\omega_0 = 4$ $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{j}{2}$, $c_{-2} = (c_2)^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ ($k \neq \pm 1, \pm 2$)

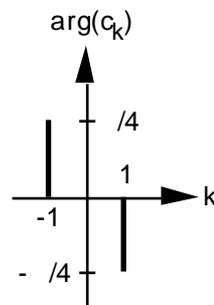
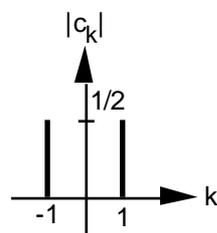


- b) $T_0 = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = 2$ $c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{j}{2}$, $c_{-3} = (c_3)^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ ($k \neq \pm 2, \pm 3$)



- c) $x(t)$ ist nicht periodisch und besitzt daher keine Fourier-Reihe.

- d) $T_0 = 8$, $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$
 $c_1 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}$, $c_{-1} = (c_1)^* = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}$, $c_k = 0$ ($k \neq \pm 1$)



4. a) (1) (2) : a_0, a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) c_k ($k \in \mathbb{Z}$)
- $$c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2} (a_k - j b_k) & (k > 0) \\ \frac{1}{2} (a_{-k} + j b_{-k}) & (k < 0) \end{cases}$$

- (2) (1) c_k ($k \in \mathbb{Z}$) a_0, a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \\ b_k &= j(c_k - c_{-k}) \end{aligned}$$

- b) (siehe Seite 7)

b)

	(1)	(2)
konstanter Anteil	a_0	c_0
Grundschiwingung	$a_1 \cdot \cos(\omega t) + b_1 \cdot \sin(\omega t)$	$c_1 \cdot e^{j\omega t} + c_{-1} \cdot e^{-j\omega t}$
2. Harmonische	$a_2 \cdot \cos(2\omega t) + b_2 \cdot \sin(2\omega t)$	$c_2 \cdot e^{j2\omega t} + c_{-2} \cdot e^{-j2\omega t}$
3. Harmonische	$a_3 \cdot \cos(3\omega t) + b_3 \cdot \sin(3\omega t)$	$c_3 \cdot e^{j3\omega t} + c_{-3} \cdot e^{-j3\omega t}$
7. Harmonische	$a_7 \cdot \cos(7\omega t) + b_7 \cdot \sin(7\omega t)$	$c_7 \cdot e^{j7\omega t} + c_{-4} \cdot e^{-j7\omega t}$
n. Harmonische	$a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)$	$c_n \cdot e^{jn\omega t} + c_{-n} \cdot e^{-jn\omega t}$

5. a) Die Koeffizienten vergrössern sich um den Faktor r.

$$c_k' = r \cdot c_k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Die Koeffizienten bleiben unverändert.

$$c_k' = c_k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) Eine Zeitverschiebung um t_0 hat für jeden Summanden in der komplexen Fourier-Reihe die folgende Auswirkung:

$$c_k \cdot e^{jk\omega t} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} & c_k \cdot e^{jk\omega(t-t_0)} \\ &= c_k \cdot e^{jk\omega t} \cdot e^{-jk\omega t_0} \\ &= (c_k \cdot e^{-jk\omega t_0}) \cdot e^{jk\omega t} \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$c_k' = c_k \cdot e^{-jk\omega t_0} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Der Betrag von c_k bleibt gleich, nur das Argument ändert:

$$|c_k'| = |c_k| \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg(c_k') = \arg(c_k) - k\omega t_0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$