Übung 8 — Reelle Fourier-Reihe
Betrags-/Phasen-Darstellung

Lernziele

- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion von der Sinus-/Cosinus-Darstellung in die Betrags-/Phasen-Darstellung umformen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- verstehen, inwiefern sich bei einer zeitlichen Verschiebung einer periodischen Funktion deren reelle Fourier-Koeffizienten in der Betrags-/Phasen-Darstellung verändern.

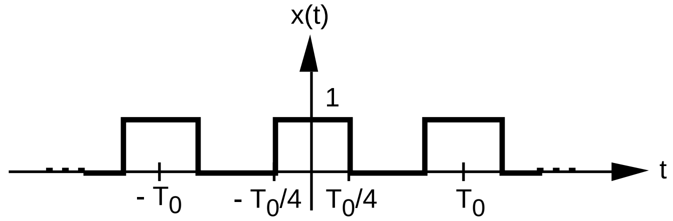
Aufgaben

1. Gegeben ist die periodische Funktion x(t) und ihre reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k ($k \in N$) und b_k ($k \in N$).

   i) Bestimmen Sie die Koeffizienten A_k ($k \in N$) und ϕ_k ($k \in N$) mit Hilfe der im Unterricht hergeleiteten Beziehungen.

   ii) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe sowohl in der Sinus-/Cosinus- als auch in der Betrags-/Phasen-Darstellung auf.

   a) x(t) aus Übung 4, Aufgabe 2:

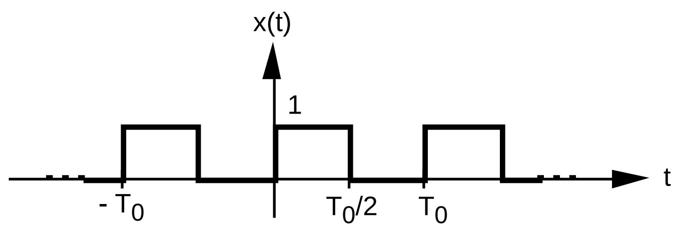


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi} & (k = 1,5,9,\ldots) \\ -\dfrac{2}{k\pi} & (k = 3,7,11,\ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{(k-1)/2}\,2}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

   b)

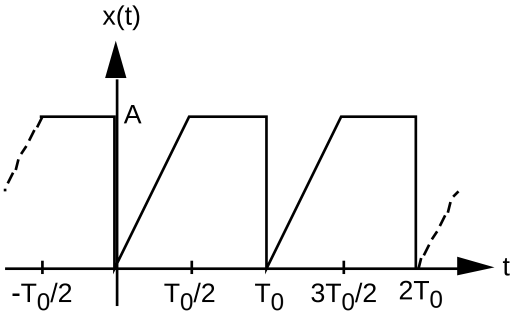


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

c) $x(t)$ aus Übung 4, Aufgabe 3:

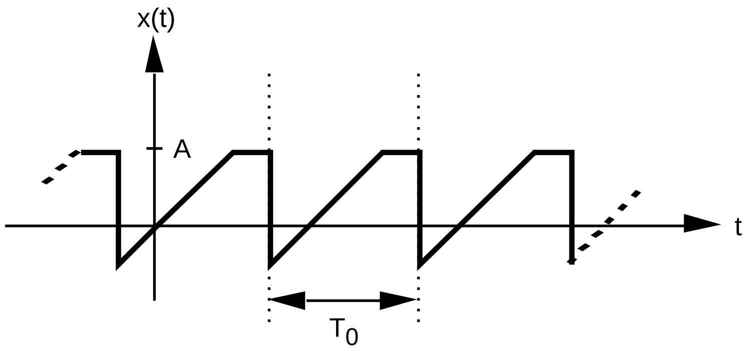


$$a_0 = \frac{3A}{4}$$

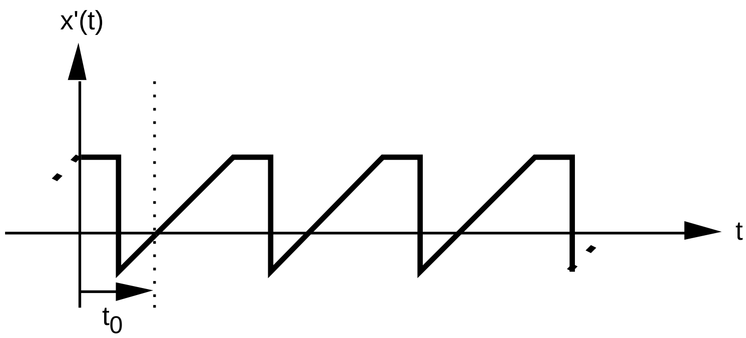
$$a_k = \begin{cases} -\dfrac{2A}{k^2\pi^2} & \text{(k ungerade)} \\ 0 & \text{(k gerade)} \end{cases}$$

$$b_k = -\frac{A}{k\pi}$$

2. Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion $x(t)$:



Die Fourier-Koeffizienten a_0, A_k (k N) und ϕ_k (k N) seien bekannt.
Nun wird $x(t)$ zeitlich um t_0 verschoben, und man erhält die verschobene Funktion $x'(t) = x(t-t_0)$:



a) Beurteilen Sie, inwiefern sich die Fourier-Koeffizienten a_0', A_k' (k N) und ϕ_k' (k N) der verschobenen Funktion $x'(t)$ gegenüber den Koeffizienten a_0, A_k (k N) und ϕ_k (k N) der ursprünglichen Funktion $x(t)$ verändert haben.

b) Prüfen Sie die Ergebnisse aus a) am Beispiel der beiden zueinander zeitlich verschobenen Rechtecksfunktionen aus der Aufgabe 1 a) und b) nach.

Lösungen

1. a) i)

$$A_k = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi} & \text{(k ungerade)} \\ 0 & \text{(k gerade)} \end{cases}$$

$$\phi_k = \begin{cases} 0 & (k = 1,5,9,\ldots) \\ \pi & (k = 3,7,11,\ldots) \\ \text{unbestimmt} & \text{(k gerade)} \end{cases}$$

ii) Sinus-/Cosinus-Darstellung:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{7\pi}\cos(7\omega_0 t) + \ldots$$

Betrags-/Phasen-Darstellung:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t+\pi) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) + \frac{2}{7\pi}\cos(7\omega_0 t+\pi) + \ldots$$

b) i)

$$A_k = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi} & \text{(k ungerade)} \\ 0 & \text{(k gerade)} \end{cases}$$

$$\phi_k = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{(k ungerade)} \\ \text{unbestimmt} & \text{(k gerade)} \end{cases}$$

ii) Sinus-/Cosinus-Darstellung:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\omega_0 t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7\omega_0 t) + \ldots$$

Betrags-/Phasen-Darstellung:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3\pi}\cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{5\pi}\cos\left(5\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

c) i)

$$A_k = \begin{cases} \dfrac{A}{k^2\pi^2}\sqrt{4+k^2\pi^2} & \text{(k ungerade)} \\ \dfrac{A}{k\pi} & \text{(k gerade)} \end{cases}$$

$$\phi_k = \begin{cases} -\arctan\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) + \pi & \text{(k ungerade)} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{(k gerade)} \end{cases}$$

ii) Sinus-/Cosinus-Darstellung:

$$x(t) = \frac{3A}{4} - \frac{2A}{\pi^2}\cos(\omega_0 t) - \frac{2A}{9\pi^2}\cos(3\omega_0 t) - \frac{2A}{25\pi^2}\cos(5\omega_0 t) - \ldots$$
$$- \frac{A}{\pi}\sin(\omega_0 t) - \frac{A}{2\pi}\sin(2\omega_0 t) - \frac{A}{3\pi}\sin(3\omega_0 t) - \ldots$$

Betrags-/Phasen-Darstellung:

$$x(t) = \frac{3A}{4} + \frac{A}{\pi^2}\sqrt{4+\pi^2}\cos\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) + \pi\right) + \frac{A}{2\pi}\cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{A}{9\pi^2}\sqrt{4+9\pi^2}\cos\left(3\omega_0 t - \arctan\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \pi\right) + \frac{A}{4\pi}\cos\left(4\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{A}{25\pi^2}\sqrt{4+25\pi^2}\cos\left(5\omega_0 t - \arctan\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \pi\right) + \frac{A}{6\pi}\cos\left(6\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

2. a) $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$

$$x'(t) = x(t-t_0) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos\Big(k\omega_0(t-t_0)+\phi_k\Big)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos\Big(k\omega_0 t + (\phi_k - k\omega_0 t_0)\Big) \overset{!}{=} a_0' + \sum_{k=1}^{\infty} A_k' \cdot \cos(k\omega_0 t + \phi_k')$$

$a_0' = a_0$
$A_k' = A_k$
$\phi_k' = \phi_k - k\omega_0 t_0$

Eine zeitliche Verschiebung ändert in den einzelnen Fourier-Komponenten nur die Phasen, die Amplituden bleiben gleich.

b) ...