

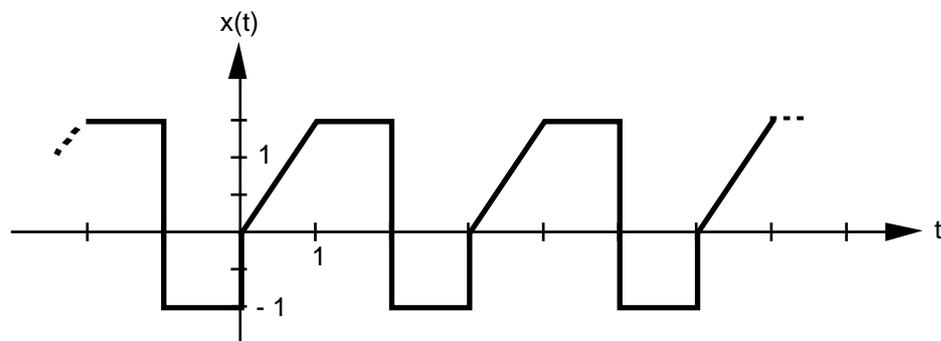
Übung 7 Reelle Fourier-Reihe Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten

Lernziele

- aus dem Grafen einer einfacheren periodischen Funktion den konstanten Anteil der reellen Fourier-Reihe herauslesen können.
- angeben können, wie sich der konstante Anteil der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion ändert, wenn der Graf der Funktion vertikal verschoben wird.
- ohne Berechnung von Integralen Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion mit speziellen Symmetrieeigenschaften machen können.
- ohne Berechnung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion bestimmen können, die sich aus trigonometrischen Teilfunktionen zusammensetzt.
- beurteilen können, wie sich die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion verändern, wenn man die Funktion skaliert.

Aufgaben

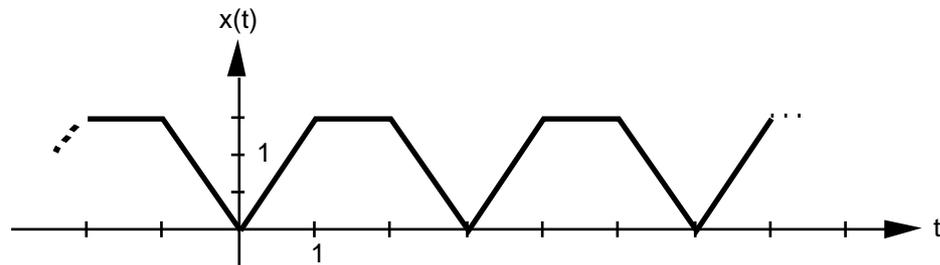
1. Gegeben ist die periodische Funktion $x(t)$:



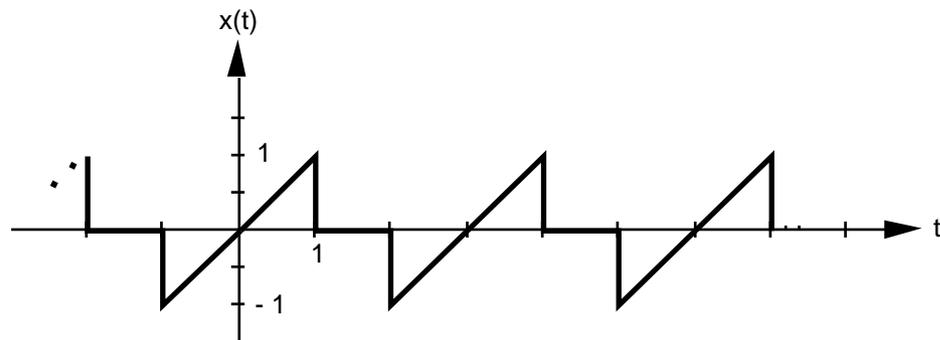
- Bestimmen Sie den reellen Fourier-Koeffizienten a_0 .
- Der Graf von $x(t)$ werde um 3 Einheiten vertikal nach oben verschoben. Wie gross ist der Koeffizient a_0 der geschobenen Funktion?
- Um wieviele Einheiten müsste man den Grafen von $x(t)$ vertikal verschieben, damit der Koeffizient a_0 der geschobenen Funktion gleich Null wird?

2. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, welche Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) der periodischen Funktion $x(t)$ möglich sind, ohne dass man Berechnungen ausführt oder in einem Formelbuch nachschaut.

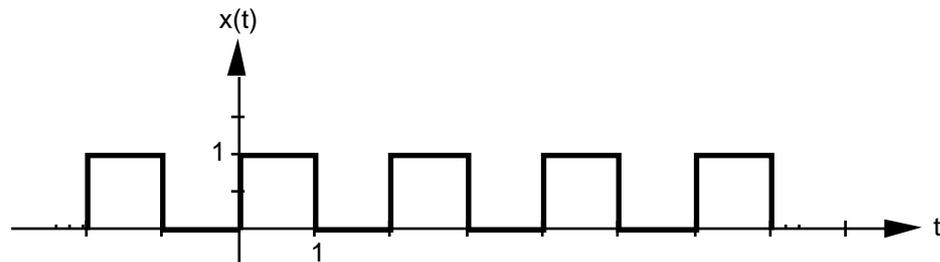
a)



b)



c)

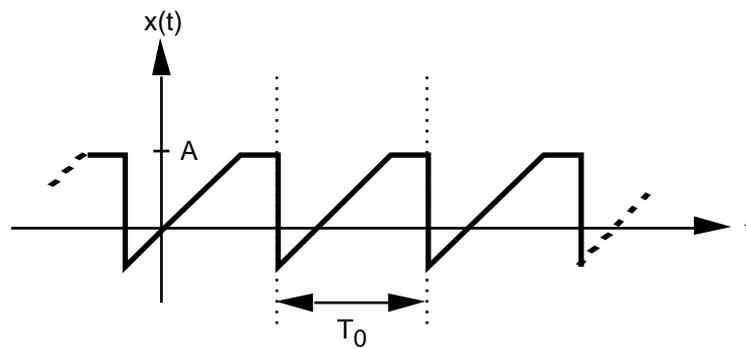


3. Bestimmen Sie ohne Tabellen und Berechnung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) der Funktion $x(t)$:

- a) $x(t) = 2 + \cos(3t) - 4 \cos(6t) + 2 \sin(15t)$
 b) $x(t) = \sin(4t) + 3 \cos(10t) - 2 \sin(12t) + \sin(24t)$
 c) $x(t) = -3 + 2 \sin\left(\frac{2}{3}t\right) + 5 \cos\left(\frac{4}{3}t\right) - 4 \sin(t)$
 d) $x(t) = -3 + 2 \sin\left(\frac{2}{3}t\right) + 5 \cos\left(\frac{4}{3}t\right) - 4 \sin(t)$
 e) $x(t) = 2 \sin(4t-1) - 4 \cos(3t+2)$

4. (siehe Blatt 3)

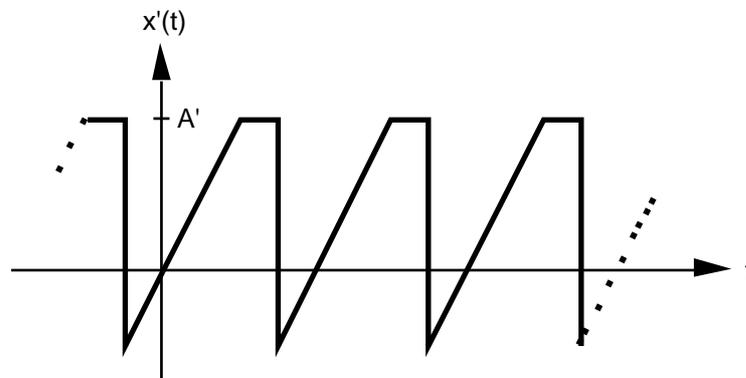
4. Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion $x(t)$:



Die reellen Fourier-Koeffizienten $a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N})$ von $x(t)$ seien bekannt.

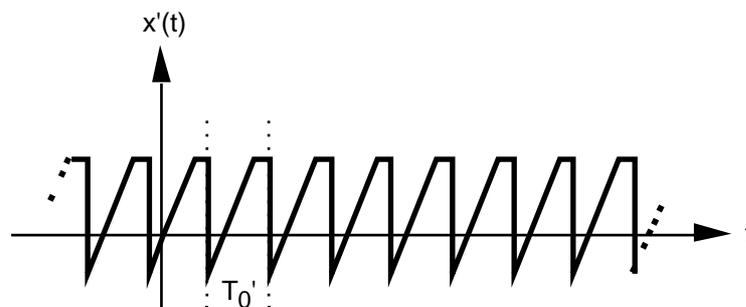
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, inwiefern sich die reellen Fourier-Koeffizienten $a_0', a_k' (k \in \mathbb{N}), b_k' (k \in \mathbb{N})$ von $x'(t)$ von den Koeffizienten $a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N})$ von $x(t)$ unterscheiden.

a)



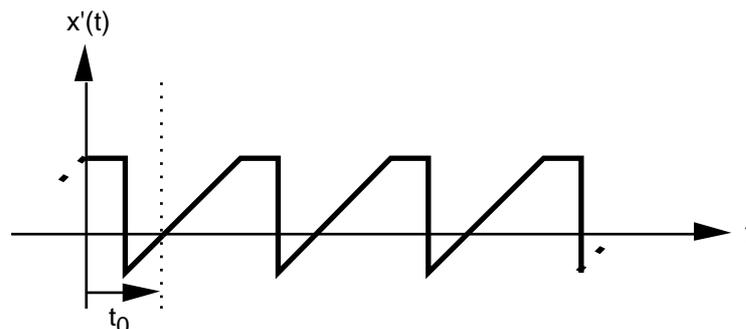
$x'(t)$ ist gegenüber $x(t)$ um den Faktor $r := \frac{A'}{A}$ skaliert, d.h. $x'(t) = r \cdot x(t)$

b)



$x'(t)$ ist gegenüber $x(t)$ zeitlich um den Faktor r skaliert bzw. "gestaucht", d.h. $T_0' = \frac{1}{r} T_0$

c) *



$x'(t)$ ist gegenüber $x(t)$ um t_0 zeitverschoben, d.h. $x'(t) = x(t-t_0)$

Lösungen

1. a) $\frac{5}{12}$
 b) $\frac{41}{12}$
 c) $-\frac{5}{12}$

2. a) $a_0 > 0, b_k = 0 (k \in \mathbb{N})$
 b) $a_0 = 0, a_k = 0 (k \in \mathbb{N})$
 c) $a_0 = \frac{1}{2}, a_k = 0 (k \in \mathbb{N})$

3. a) $a_0 = 3 \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k3t) + b_k \cdot \sin(k3t))$
 $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = -4, b_5 = 2, \text{ alle anderen Koeffizienten} = 0$

b) $a_0 = 2 \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k2t) + b_k \cdot \sin(k2t))$
 $a_0 = 0, b_2 = 1, a_5 = 3, b_6 = -2, b_{12} = 1, \text{ alle anderen Koeffizienten} = 0$

c) $a_0 = \frac{2}{3} \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos\left(\frac{k}{3}t\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k}{3}t\right)$
 $a_0 = -3, b_2 = 2, b_3 = -4, a_4 = 5, \text{ alle anderen Koeffizienten} = 0$

d) $x(t)$ ist nicht periodisch und besitzt daher keine reelle Fourier-Reihe.

e) $a_0 = 0, a_3 = -4 \cos(2), a_4 = -2 \sin(1), b_3 = 4 \sin(2), b_4 = 2 \cos(1),$
 alle anderen Koeffizienten = 0

4. a) Die Koeffizienten vergrößern sich um den Faktor r
 $a_0' = r \cdot a_0, a_k' = r \cdot a_k (k \in \mathbb{N}), b_k' = r \cdot b_k (k \in \mathbb{N})$

b) Die Koeffizienten bleiben unverändert
 $a_0' = a_0, a_k' = a_k (k \in \mathbb{N}), b_k' = b_k (k \in \mathbb{N})$

c) * $a_0' = a_0$

k-te Harmonische

$$a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t)$$

$$a_k \cdot \cos(k \cdot \omega(t-t_0)) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega(t-t_0))$$

$$= a_k (\cos(k \cdot \omega t) \cdot \cos(k \cdot \omega t_0) + \sin(k \cdot \omega t) \cdot \sin(k \cdot \omega t_0))$$

$$+ b_k (\sin(k \cdot \omega t) \cdot \cos(k \cdot \omega t_0) - \cos(k \cdot \omega t) \cdot \sin(k \cdot \omega t_0))$$

= ...

$$= (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t_0) - b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t_0)) \cos(k \cdot \omega t) + (a_k \cdot \sin(k \cdot \omega t_0) + b_k \cdot \cos(k \cdot \omega t_0)) \sin(k \cdot \omega t)$$

Es folgt also:

$$a_k' = a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t_0) - b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t_0)$$

$$b_k' = a_k \cdot \sin(k \cdot \omega t_0) + b_k \cdot \cos(k \cdot \omega t_0)$$