Übung 4 Reelle Fourier-Reihe
Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten

Lernziele

- einfachere theoretische Sachverhalte analysieren können.
- die reellen Fourier-Koeffizienten einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.

Aufgaben

1. Im Unterricht wurden die folgenden Formeln zur Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) einer periodischen Funktion x(t) hergeleitet:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

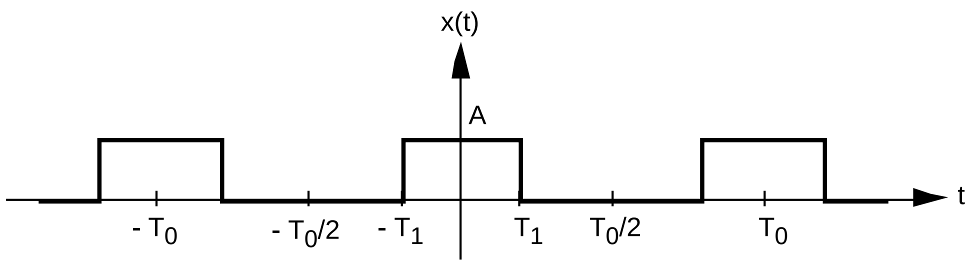
a) Prüfen Sie nach, dass die Integranden in allen drei Integralen die Periode (nicht notwendigerweise **Grund**periode) T_0 besitzen.

b) Erklären Sie, dass man auf Grund der T_0 - Periodizität der Integranden über ein **beliebiges** Intervall der Länge T_0 integrieren kann:

$$\int_0^{T_0} \ldots\, dt = \int_{(T_0)} \ldots\, dt$$

2. Gegeben ist die folgende periodische Rechtecks-Funktion x(t) (Beispiel auf den Theorieblättern "Reelle Fourier-Reihe"):

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t| < T_1) \\ 0 & \left(T_1 < |t| < \frac{T_0}{2}\right) \end{cases} \quad , \qquad x(t+T_0) = x(t)$$



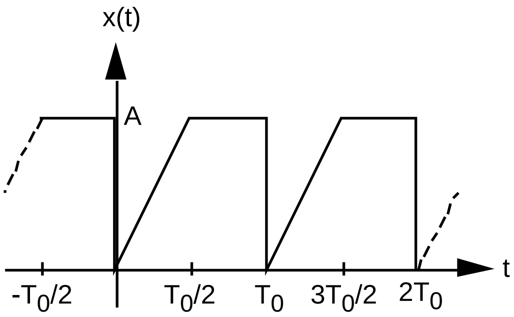
a) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) von x(t) von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle

Betrachten Sie nun den Spezialfall $A := 1$, $T_1 := \frac{T_0}{4}$

b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten, d.h. vereinfachen Sie die Resultate aus a).

c) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

3. Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion x(t):



a) Geben Sie x(t) analytisch an, d.h. die Funktionsgleichung x(t) = ...

b) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N) von x(t) von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.

c) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

Integraltabelle

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int x \cdot \sin(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int x \cdot \cos(ax)\,dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \sin(ax)}{a} + C \qquad (a \neq 0)$$

Lösungen

1. a) $x(t)$ hat Grundperiode T_0

$\cos(k\omega_0 t)$ und $\sin(k\omega_0 t)$ haben Grundperiode $\frac{2\pi}{k\omega_0} = \frac{T_0}{k}$

$x(t)$, $x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)$ und $x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)$ haben Periode T_0

b) ...

2. a)

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\, dt = \ldots = \frac{2AT_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\, dt = \ldots = \frac{2A\cdot\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\, dt = \ldots = 0$$

b)

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k=1,5,9,\ldots) \\ -\frac{2}{k\pi} & (k=3,7,11,\ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{(-1)^{(k-1)/2}\,2}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

c)

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{7\pi}\cos(7\omega_0 t) + \ldots$$

3. a)

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T_0}\,t & \left(0 \le t < \frac{T_0}{2}\right) \\ A & \left(\frac{T_0}{2} \le t < T_0\right) \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$$

b)

$$a_0 = \frac{3A}{4}$$

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2\pi^2} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = -\frac{A}{k\pi}$$

c)

$$x(t) = \frac{3A}{4} - \frac{2A}{\pi^2}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$
$$- \frac{A}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \ldots\right)$$