Übung 3 Fourier-Reihen
Trigonometrische Basisfunktionen, Analogie Signal-Vektor, Integrale

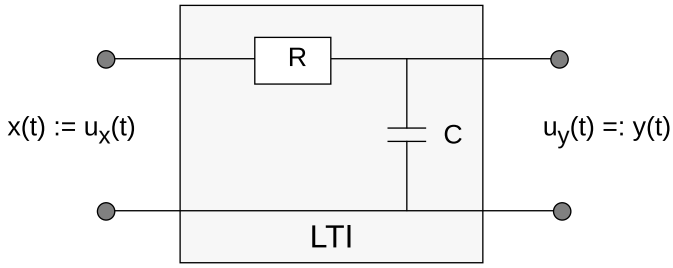
Lernziele

- verstehen, dass es sinnvoll sein kann, eine Funktion als Linearkombination von geeigneten Basisfunktionen darzustellen.
- verstehen, dass es sinnvoll ist, ein periodisches Signal, welches durch ein LTI-System läuft, als Linearkombination von sinusförmigen Teilsignalen darzustellen.
- einfachere Integrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle lösen können.

Aufgaben

1. **Trigonometrische Basisfunktionen**

Im Unterrichtszimmer ist die folgende RC-Schaltung aufgebaut ($R = 1\ \text{k}\Omega$, $C = 100$ nF):



Die Schaltung bildet ein lineares, zeitinvariantes System (LTI-System).
Die an der Schaltung angelegte Spannung $u_x(t)$ entspricht dem Eingangssignal $x(t)$.
Die Spannung $u_y(t)$ über dem Kondensator enspricht dem Ausgangssignal $y(t)$.

Ein Funktions-Generator liefert das Eingangssignal $x(t)$. Der zeitliche Verlauf des Eingangssignals $x(t)$ und des Ausgangssignals $y(t)$ können auf einem Kathodenstrahl-Oszillografen (KO) betrachtet werden.

Die Werte von R und C sind gegeben durch $R = 1\ \text{k}\Omega$ und $C = 100$ nF.

a) Stellen Sie am Funktions-Generator ein **sinusförmiges** Signal mit der Amplitude 0.5 V (1 V peak-to-peak) und der Frequenz 1 kHz ein.
Stellen Sie am KO fest:
- Das Augangssignal ist ebenfalls ein **sinusförmiges** Signal
- Die **Frequenz** ist gleich wie beim Eingangssignal. Lediglich **Amplitude** und **Phase** haben sich verändert.

b) Variieren Sie am Funktions-Generator die Frequenz des Eingangssignals.
Stellen Sie am KO fest:
- Das Ausgangssignal hat immer die gleiche Frequenz wie das Eingangssignal.
- Die Amplitude und die Phase des Ausgangssignals hängen von der Frequenz ab.

Begründen sie, dass es sich beim betrachteten System um ein Tiefpassfilter handelt.

c) Stellen Sie nun am Funktions-Generator ein **Dreieckssignal** ein.
Stellen Sie am KO fest:
- Das Ausgangssignal ist **kein Dreieckssignal** mehr.

2. **Analogie Signal ↔ Vektor**

In dieser Aufgabe soll die folgende Analogie aufgezeigt werden:

Ein Signal $x(t)$ durchläuft ein lineares System.
↕
Ein Vektor $\vec{x}$ wird einer linearen Abbildung (hier: Drehung) unterzogen.

Gegeben ist der folgende Vektor $\vec{x}$ im dreidimensionalen Raum:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{x}$ wird um 90° um die z-Achse gedreht.
Gesucht ist der zu $\vec{x}$ gehörige Bildvektor $\vec{y}$.

a) Finden Sie eine Methode, um den Bildvektor $\vec{y}$ möglichst einfach zu bestimmen. Die Methode soll eine Zerlegung von $\vec{x}$ in möglichst günstige Teilvektoren beinhalten. Beschreiben Sie das Vorgehen in ein paar Stichworten.

b) Erklären Sie, worin die in der Einleitung dieser Aufgabe erwähnte Analogie besteht.

3. **Integrale**

In der Herleitung der Formeln zur Berechung der reellen Fourier-Koeffizienten von periodischen Funktionen treten die nachstehenden Integrale auf.
Bestimmen Sie die Integrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.
Es gilt jeweils $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig, $m \in \mathbb{N}$ beliebig

a) $\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\, dt$

b) $\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t)\, dt$

c) $\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\cdot\sin(m\omega_0 t)\, dt$

d) $\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t)\cdot\cos(m\omega_0 t)\, dt$

e) $\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\cdot\cos(m\omega_0 t)\, dt$

Integraltabelle

$$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \cos(ax)\, dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\, dx = \frac{\sin\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} - \frac{\sin\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C \qquad (|a| \neq |b|)$$

$$\int \sin^2(ax)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\, dx = \frac{\sin\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} + \frac{\sin\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C \qquad (|a| \neq |b|)$$

$$\int \cos^2(ax)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\, dx = -\frac{\cos\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} - \frac{\cos\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} + C \qquad (|a| \neq |b|)$$

$$\int \sin(ax)\cos(ax)\, dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a} + C \qquad (a \neq 0)$$

Lösungen

1. ...

2. a) - $\vec{x}$ darstellen als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2 + 5\,\vec{e}_3$$

- Drehung auf die einzelnen Basisvektoren anwenden:

$$\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_2$$
$$\vec{e}_2 \rightarrow -\vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3 \rightarrow \vec{e}_3$$

- Bildvektor als Linerkombination der Bildvektoren der Basisvektoren zusammensetzen:

$$\vec{y} = 2\,\vec{e}_2 + 4\left(-\vec{e}_1\right) + 5\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Analogie in tabellarischer Darstellung:

Signal x(t)	Vektor $\vec{x}$
Das Signal x(t) durchläuft ein lineares System.	Der Vektor $\vec{x}$ wird einer linearen Abbildung unterworfen.
Basisignale $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, ...	Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$
Das Signal x(t) wird dargestellt als Linearkombination der Basissignale $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, ...	Der Vektor wird dargestellt als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$
Die Basissignale $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, ... verhalten sich bezüglich des betrachteten Systems sehr einfach.	Die Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ verhalten sich gegenüber der betrachteten Abbildung sehr einfach.
Das Ausgangssignal y(t) setzt sich zusammen als Linearkombination der Ausgangssignale der einzelnen Basissignale.	Der Bildvektor $\vec{y}$ setzt sich zusammen als Linearkombination der Bildvektoren der einzelnen Basisvektoren.

3. a) $$\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\,dt = 0$$

b) $$\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t)\,dt = 0$$

c) $$\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\cdot\sin(m\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ \dfrac{T_0}{2} & (k = m) \end{cases}$$

d) $$\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t)\cdot\cos(m\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ \dfrac{T_0}{2} & (k = m) \end{cases}$$

e) $$\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\cdot\cos(m\omega_0 t)\,dt = 0$$