

Parseval'sche Beziehung

Diskrete Fourier-Transformierte $\text{DFT}(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi mn/N}$

Parseval'sche Beziehung $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (x[n])^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (X[m])^* e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} x[n] (X[m])^* e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} x[n] (X[m])^* e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (X[m])^* \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (X[m])^* X[m] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2 \end{aligned}$$

Physikalische Interpretation:

$x[n]$: "Signal" zur Zeit $t = nT$
(elektr. Spannung, elektr. Stromstärke, ...)

$|x[n]|^2$ Momentanleistung des Signals zum Zeitpunkt $t = nT$
(Proportionalitätskonstante hängt nur von Systemparametern ab, z.B. Widerstand R)

$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$ Aufsummierte Leistung des Signals zu den
Zeitpunkten $t = 0, T, \dots, (N-1)T$

$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2$

$|X[m]|^2$ Leistung im Signal in der Frequenz $= m \cdot \frac{2}{NT}$