

Parseval'sche Beziehung

$x(t)$ aperiodisch

Fourier-Integral $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$

Fourier-Transformierte $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

Parseval'sche Beziehung $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot (x(t))^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega))^* \cdot e^{-j\omega t} d\omega dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} (X(\omega))^* \cdot x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} (X(\omega))^* \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} (X(\omega))^* \cdot X(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Physikalische Interpretation:	$x(t)$:	"Signal" (elektr. Spannung, elektr. Stromstärke, ...)
	$ x(t) ^2$		Momentanleistung des Signals (Proportionalitätskonstante hängt nur von Systemparametern ab, z.B. Widerstand R)
	$ x(t) ^2 dt$		Energie im Signal im Zeitintervall $[t, t+dt]$
	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$		Gesamtenergie im Signal
	$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$		
	$ X(\omega) ^2 d\omega$		Energie im Signal im Frequenzintervall $[\omega, \omega+d\omega]$
	$ X(\omega) ^2$		Energiedichte im Signal
	$ X(\omega) ^2$ wird als Energiedichtespektrum bezeichnet.		

