# Komplexe Fourier-Reihe

### Herleitung aus der reellen Fourier-Reihe

Reelle FR $\quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right)$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \frac{1}{2} \left(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}\right) + b_k \cdot \frac{1}{2j} \left(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}\right) \right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \left( a_k + \frac{1}{j} b_k \right) e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left( a_k - \frac{1}{j} b_k \right) e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} (a_k - jb_k)\, e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_k + jb_k)\, e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} (a_k - jb_k)\, e^{jk\omega_0 t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} (a_k + jb_k)\, e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} (a_k - jb_k)\, e^{jk\omega_0 t} \right) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left( \frac{1}{2} (a_{-k} + jb_{-k})\, e^{jk\omega_0 t} \right)$$

**Def.:**
$$\boxed{c_k := \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2} (a_k - jb_k) & (k>0) \\ \frac{1}{2} (a_{-k} + jb_{-k}) & (k<0) \end{cases}}$$

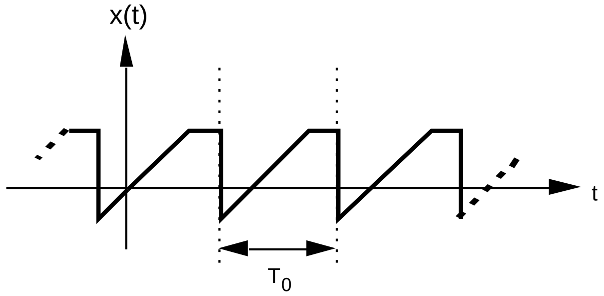
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$= c_0\, e^{j0\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

Komplexe FR $\quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$

**Definition**

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal $x(t)$ mit Grundperiode $T_0$




Die Reihe in der Darstellung

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **komplexe Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Die Konstanten $c_k$ (k Z) sind die **komplexen Fourier-Koeffizienten**.

| | |
|---|---|
| $x(t) = c_0$ | Konstanter Anteil |
| $+\ c_1\, e^{j\omega_0 t} + c_{-1}\, e^{-j\omega_0 t}$ | 1. Harmonische, Grundschwingung |
| $+\ c_2\, e^{j2\omega_0 t} + c_{-2}\, e^{-j2\omega_0 t}$ | 2. Harmonische, 1. Oberschwingung |
| $+\ c_3\, e^{j3\omega_0 t} + c_{-3}\, e^{-j3\omega_0 t}$ | 3. Harmonische, 2. Oberschwingung |
| $+\ \ldots$ | |
| $+\ c_n\, e^{jn\omega_0 t} + c_{-n}\, e^{-jn\omega_0 t}$ | n. Harmonische, (n-1). Oberschwingung |
| $+\ \ldots$ | |

**Direkte Bestimmung der komplexen Fourier-Koeffizienten**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} \qquad \Big|\ \cdot\ e^{-jm\omega_0 t},\ m\ \ Z \qquad \Big|\ \int_0^{T_0} \ldots\, dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t)\cdot e^{-jm\omega_0 t}\, dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}\cdot e^{-jm\omega_0 t}\, dt$$

$$= \ldots$$

$$= c_m \cdot T_0 \qquad \Big|\ : T_0$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Da der Integrand die Periode $T_0$ besitzt, kann über ein beliebiges Intervall der Länge $T_0$ integriert werden:

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt}$$