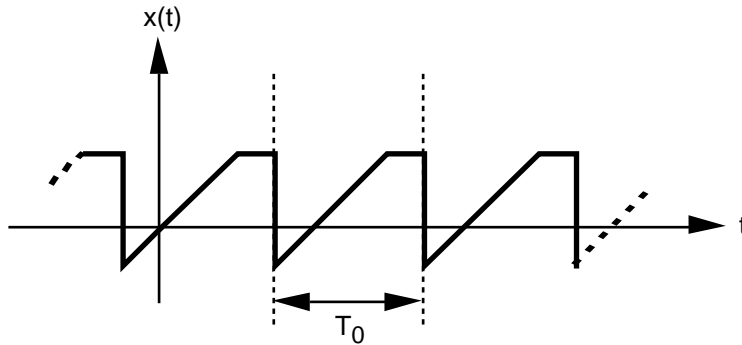


## Reelle Fourier-Reihe

### Definition

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal  $x(t)$  mit Grundperiode  $T_0$



Die trigonometrische Reihe in der Darstellung

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **reelle Fourier-Reihe** von  $x(t)$ .

Die Konstanten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sind die **reellen Fourier-Koeffizienten**.

Die Fourier-Reihen-Darstellung erlaubt es,  $x(t)$  in einen konstanten Anteil, in eine Grundschwingung und in Oberschwingungen aufzuteilen:

$x(t) = a_0$	Konstanter Anteil
$+ a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$	1. Harmonische, Grundschwingung
$+ a_2 \cdot \cos(2 \omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2 \omega_0 t)$	2. Harmonische, 1. Oberschwingung
$+ a_3 \cdot \cos(3 \omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3 \omega_0 t)$	3. Harmonische, 2. Oberschwingung
$+ \dots$	
$+ a_n \cdot \cos(n \omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n \omega_0 t)$	n. Harmonische, (n-1). Oberschwingung
$+ \dots$	

### Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left( a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \right) dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \left( a_0 \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_0^{T_0} \cos(k \cdot \omega_0 t) dt + b_k \int_0^{T_0} \sin(k \cdot \omega_0 t) dt) \right)$$

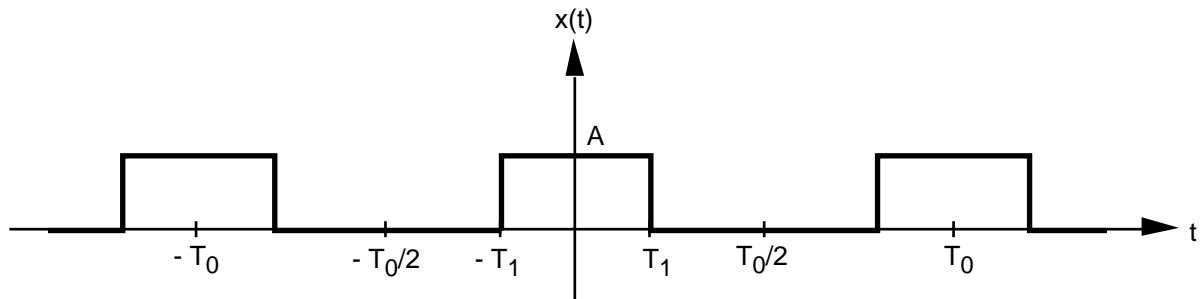
$$= a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$



**Beispiel**

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t| < T_1) \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$$



$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt = \dots = \frac{2AT_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k \omega_0 t) dt = \dots = \frac{2A \cdot \sin(k \omega_0 T_1)}{k}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k \omega_0 t) dt = \dots = 0$$

$$x(t) = \frac{2AT_1}{T_0} + \frac{2A \cdot \sin(\omega_0 T_1)}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + \frac{2A \cdot \sin(2\omega_0 T_1)}{2\omega_0} \cos(2\omega_0 t) + \frac{2A \cdot \sin(3\omega_0 T_1)}{3\omega_0} \cos(3\omega_0 t) + \dots$$

### Betrags-/Phasen-Darstellung

Die reelle Fourier-Reihe kann sowohl in der Sinus-/Cosinus- als auch in der Betrags-/Phasen-Darstellung geschrieben werden:

*Sinus-/Cosinus-Darstellung*

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \quad (a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R})$$

*Betrags-/Phasen-Darstellung*

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t + \varphi_k) \quad (a_0 \in \mathbb{R}, A_k \geq 0, \varphi_k \in ]-\pi, \pi[)$$

oder

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t + \psi_k) \quad (a_0 \in \mathbb{R}, B_k \geq 0, \psi_k \in ]-\pi, \pi[)$$

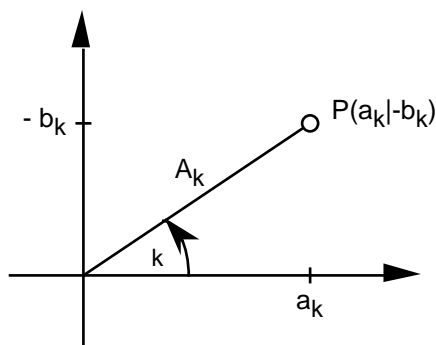
Für die Umrechnung der Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  in die Koeffizienten  $A_k$  und  $\varphi_k$  können  $a_k$  und  $-b_k$  als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$$a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t) = A_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t + \varphi_k)$$

...

$$a_k = A_k \cdot \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = -A_k \cdot \sin(\varphi_k)$$



$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$	
$\varphi_k =$	$-\arctan \frac{b_k}{a_k} \quad (a_k > 0)$
$\varphi_k =$	$-\frac{\pi}{2} \quad (a_k = 0, b_k > 0)$
$\varphi_k =$	$\frac{\pi}{2} \quad (a_k = 0, b_k < 0)$
$\varphi_k =$	$-\arctan \frac{b_k}{a_k} + \pi \quad (a_k < 0)$

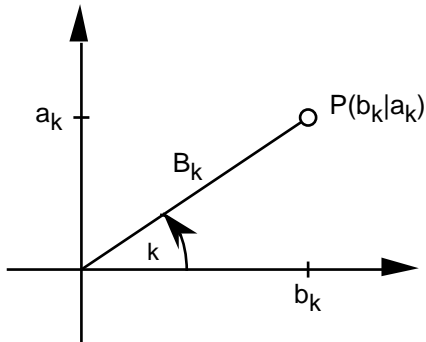
Für die Umrechnung der Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  in die Koeffizienten  $B_k$  und  $\varphi_k$  können  $b_k$  und  $a_k$  als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$$a_k \cdot \cos(k \cdot \varphi_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \varphi_0 t) = B_k \cdot \sin(k \cdot \varphi_0 t + \varphi_k)$$

...

$$a_k = B_k \cdot \sin(\varphi_k)$$

$$b_k = B_k \cdot \cos(\varphi_k)$$



$$B_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \quad (b_k > 0)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} \quad (b_k = 0, a_k > 0)$$

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{2} \quad (b_k = 0, a_k < 0)$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} + \pi \quad (b_k < 0)$$