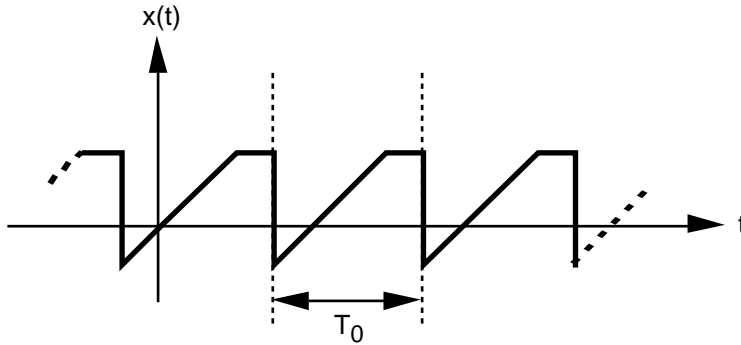


## Fourier-Reihen: Einführung

### Ausgangspunkt

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal  $x(t)$  mit Grundperiode  $T_0$  bzw. Grundfrequenz  $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$



### Ziel

Darstellung von  $x(t)$  als Linearkombination von trigonometrischen Funktionen bzw. Signalen  $\cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \cos(3\omega_0 t), \dots, \sin(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \sin(3\omega_0 t), \dots$

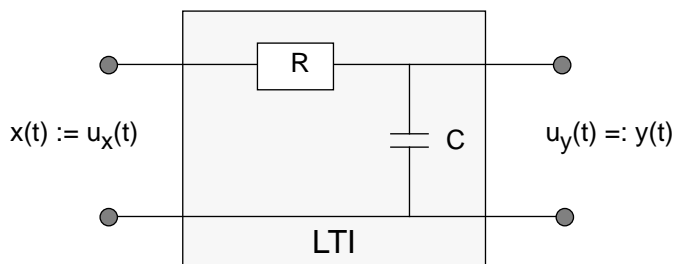
$$x(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots \\ + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t))$$

### Begründung

$x(t)$  sei ein an einem linearen System (LTI-System) angelegtes Eingangssignal, und es soll das dazugehörige Ausgangssignal  $y(t)$  bestimmt werden.

Bsp.: Tiefpassfilter als LTI-System



Es ist günstig,  $x(t)$  in trigonometrische Teilsignale zu zerlegen. Trigonometrische Signale werden beim Durchgang durch das System nur in ihrer Amplitude und Phase verändert, nicht jedoch in ihrer Frequenz (Experiment).

$$\sin(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow A(\omega_0) \cdot \sin(\omega_0 t - \phi(\omega_0)) \\ \cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow A(\omega_0) \cdot \cos(\omega_0 t - \phi(\omega_0))$$

Das Ausgangssignal  $y(t)$  ist wegen der Linearität des Systems eine Linearkombination der Ausgänge zu den einzelnen trigonometrischen Teilsignalen.

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t))$$



$$y(t) = a_0' + \sum_{k=1} (a_k' \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t - \varphi_k) + b_k' \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t - \varphi_k))$$

## Verallgemeinerung der Idee der Fourier-Zerlegung

### Ausgangspunkt

Beliebige Funktion bzw. beliebiges Signal  $x(t)$

### Ziel

Darstellung von  $x(t)$  als Linearkombination von bestimmten Basisfunktionen bzw. Basissignalen  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\varphi_3(t)$ , ...

$$x(t) = \varphi_1 \cdot \varphi_1(t) + \varphi_2 \cdot \varphi_2(t) + \varphi_3 \cdot \varphi_3(t) + \dots$$

$$x(t) = \sum_{k=1} \varphi_k \cdot \varphi_k(t)$$

### Begründung

Soll die Funktion  $x(t)$  einer linearen Abbildung  $T$  unterzogen werden, so ist es günstig,  $x(t)$  in Basisfunktionen  $\varphi_k(t)$  zu zerlegen, die sich bezüglich der Abbildung  $T$  möglichst einfach verhalten.

Die Bildfunktion  $x'(t)$  von  $x(t)$  ist wegen der Linearität eine Linearkombination der Bildfunktionen  $\varphi_k'(t)$  von  $\varphi_k(t)$ :

$$T: \quad \varphi_k(t) \quad \rightarrow \quad \varphi_k'(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=1} \varphi_k \cdot \varphi_k(t) \quad \rightarrow \quad x'(t) = \sum_{k=1} \varphi_k \cdot \varphi_k'(t)$$