

Komplexe Zahlen

Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{z \mid z = x + j \cdot y \quad x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R}\}$$

j = imaginäre Einheit
 $j^2 = -1$

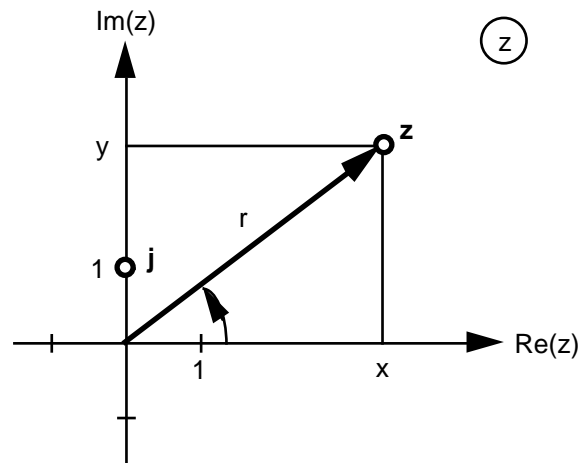
Darstellung einer komplexen Zahl

Kartesische Form $z = x + j \cdot y$

Polarform $z = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot \text{cis}(\varphi)$

Exponentialform $z = r \cdot e^{j\varphi}$

Gauss'sche Zahlenebene



$x = \text{Re}(z)$ Realteil
 $y = \text{Im}(z)$ Imaginärteil
 $r = |z|$ Betrag
 $\varphi = \arg(z)$ Argument

Euler'sche Formel

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

Bew.: Potenzreihenentwicklung

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

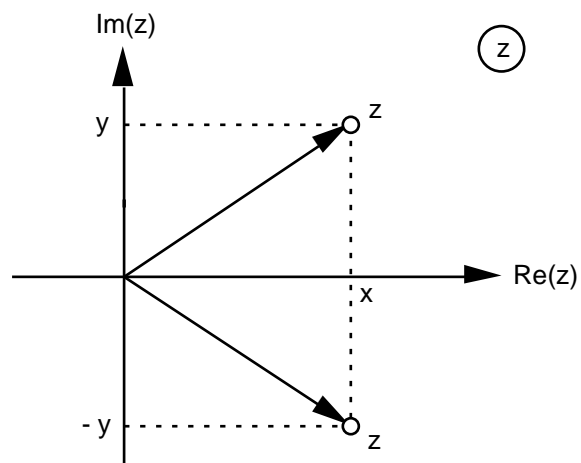
$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots$$

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + j\varphi + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} + \frac{(j\varphi)^6}{6!} + \dots \\ &= 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right) + j \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Komplexe Konjugation

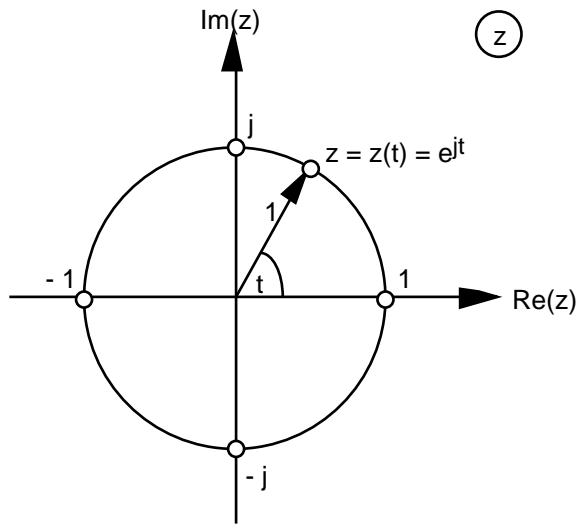
$$z = x + j \cdot y$$

$$z^* := x - j \cdot y \quad \text{komplex konjugierte Zahl}$$

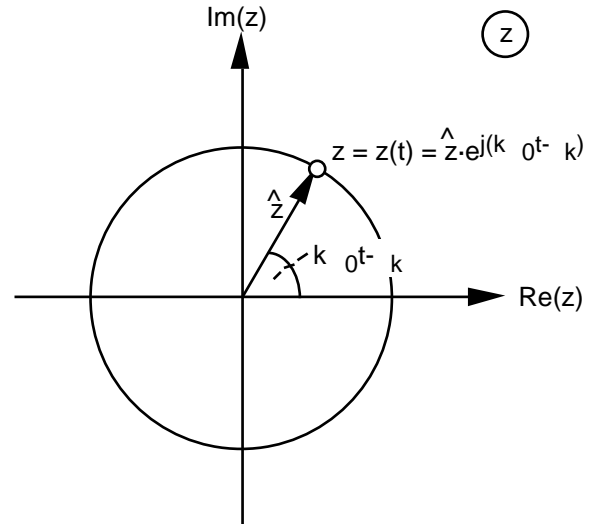


Komplexe Exponentialfunktion

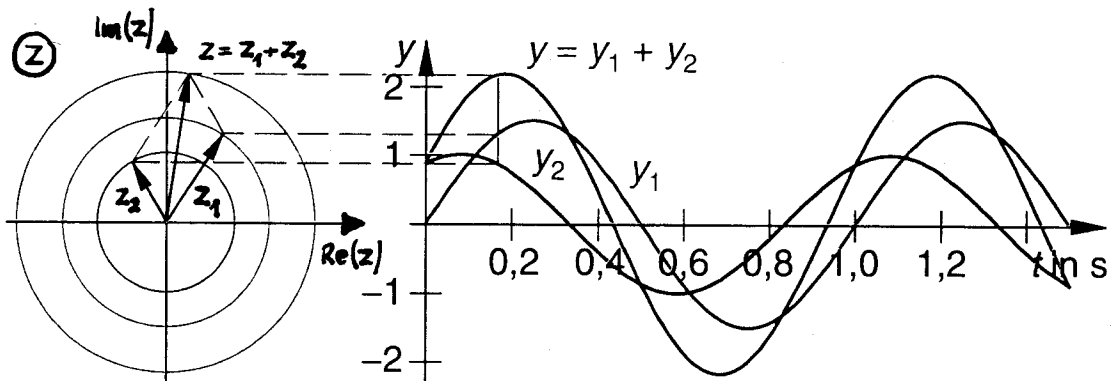
$z : \begin{matrix} \text{R} & \text{C} \\ t & z = z(t) = e^{jt} \end{matrix}$



$z : \begin{matrix} \text{R} & \text{C} \\ t & z = z(t) = \hat{z} \cdot e^{j(k \cdot t - k)} \end{matrix}$



Zeigerdiagramm



$y_1(t) = \hat{y}_1 \sin(\omega t)$

$z_1(t) = \hat{y}_1 e^{j \omega t}$

$y_1(t) = \text{Im}(z_1(t)) = \text{Im}(\hat{y}_1 e^{j \omega t})$

$y_2(t) = \hat{y}_2 \sin(\omega t - \phi)$

$z_2(t) = \hat{y}_2 e^{j(\omega t - \phi)}$

$y_2(t) = \text{Im}(z_2(t)) = \text{Im}(\hat{y}_2 e^{j(\omega t - \phi)})$