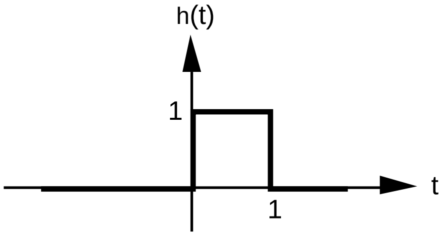
Repetitions-Übung 4 Fourier-Transformation

Aufgaben

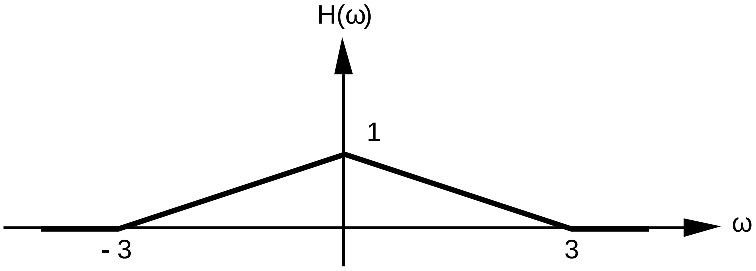
1. Gegeben ist der Graf der Einheitsimpuls-Übertragungsfunktion h(t) eines LTI-Systems:



Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und den Grafen des zum Eingangssignal $x(t) = \varepsilon(t)$ gehörenden Ausgangssignals y(t).

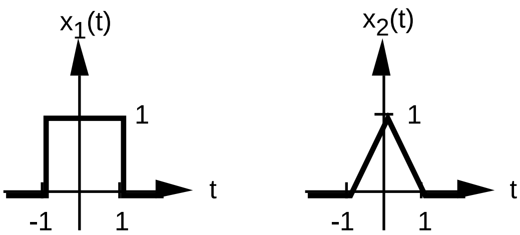
Allfällige Integrale müssen ohne Taschenrechner berechnet werden.

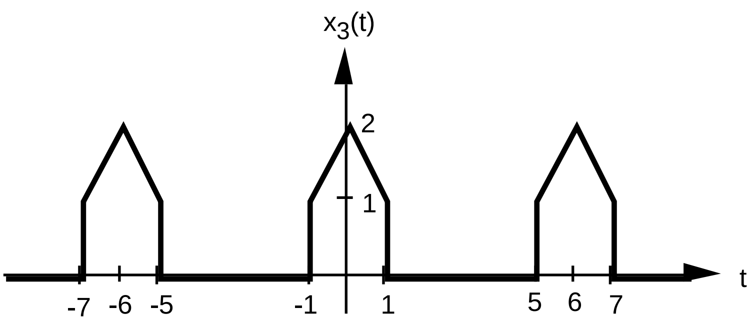
2. Gegeben ist der Graf des Frequenzganges $H(\omega)$ eines LTI-Systems:



Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des zum Eingangssignal
$x(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t)$ gehörenden Ausgangssignals y(t).

3. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ sowie der periodischen Funktion $x_3(t)$:





Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ durch die als bekannt vorausgesetzten Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ aus.

Sie sollen also nicht den konkreten Ausdruck für $X_3(\omega)$ berechnen, sondern den Zusammenhang zwischen $X_3(\omega)$ und den beiden bekannten Transformierten $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ angeben.

4. Gegeben sind die beiden Funktionen

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (-1<T<1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \cos(20\cdot t) + 2\cdot\cos(40\cdot t)$$

Nun wird das Produkt $x(t) := x_1(t)\cdot x_2(t)$ gebildet.

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von $x(t)$, und zeichnen Sie den Grafen von $X(\omega)$.

Aus Ihrer grafischen Darstellung von $X(\omega)$ sollte man die Funktionsgleichung von $X(\omega)$ herauslesen können.

5. Von einem LTI-System kennt man einen Input $x_1(t)$ und den dazugehörigen Output $y_1(t)$:

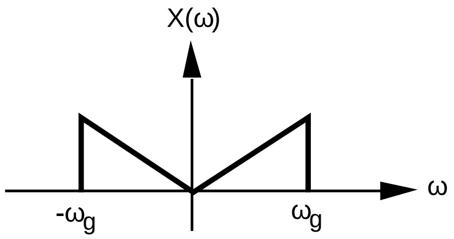
$$x_1(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$$
$$y_1(t) = e^{-2(t-1)}\,\varepsilon(t-1)$$

Bestimmen Sie den Output $y_2(t)$, welcher zum folgenden Input $x_2(t)$ gehört:

$$x_2(t) = \delta(t-3)$$

6. Ein Modulator bildet das Produkt von zwei Zeitsignalen, dem Nachrichtensignal $x(t)$ und dem Trägersignal $s(t)$. Das Produkt $y(t) = x(t)\cdot s(t)$ ist das modulierte Signal.

Das Nachrichtensignal habe das folgende Spektrum:

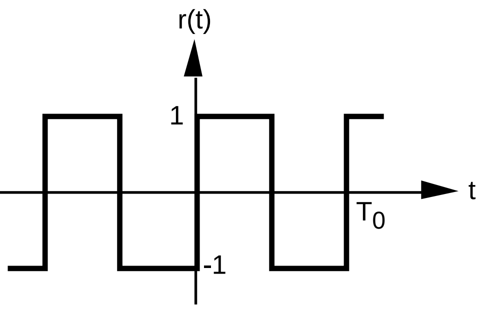


Skizzieren Sie das Fourierspektrum $Y(\omega)$ des modulierten Signals für die drei Fälle a), b) und c).

a) $s(t) = K\cos(\omega_0 t)$

b) $s(t) = K\sin(\omega_0 t)$

c) $r(t)$

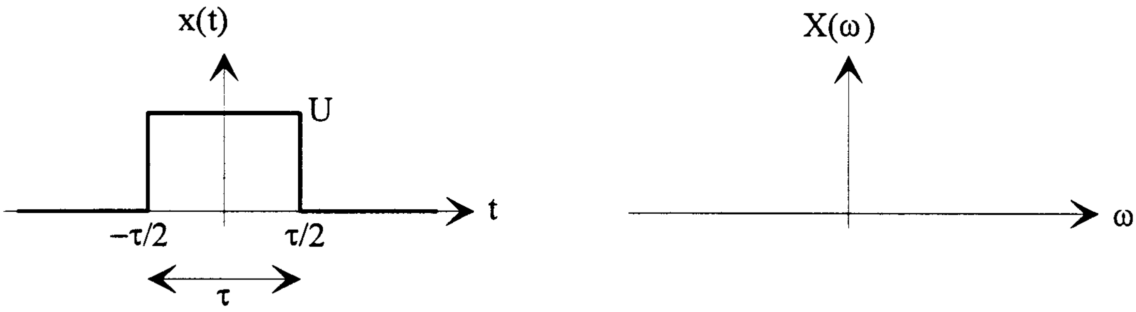


Annahme: Es gelte jeweils $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} >> \omega_g$

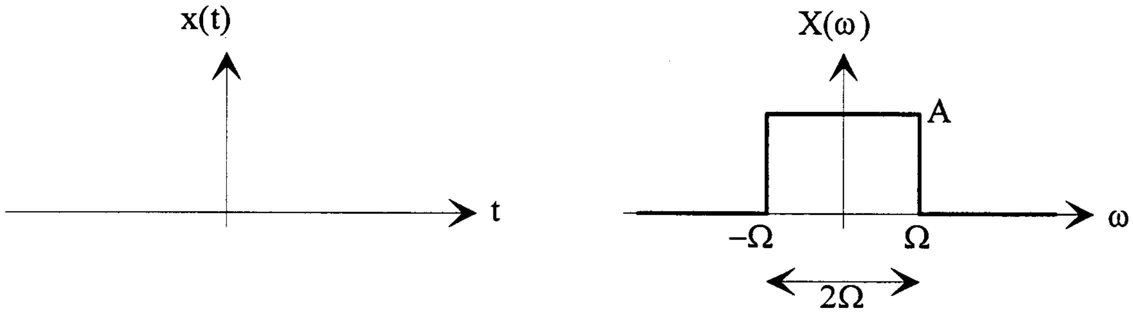
7. Gegeben ist entweder das Zeitsignal x(t) oder dessen Spektrum X(ω).

Bestimmen Sie das Spektrum X(ω) (bei gegebenem x(t)) bzw. das Zeitsignal x(t) (bei gegebenem Spektrum X(ω)), und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von X(ω) bzw. x(t).

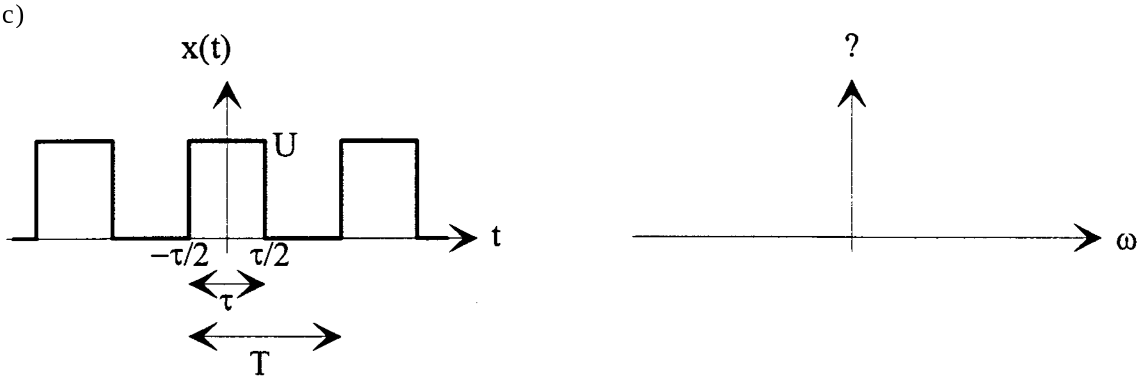
a)



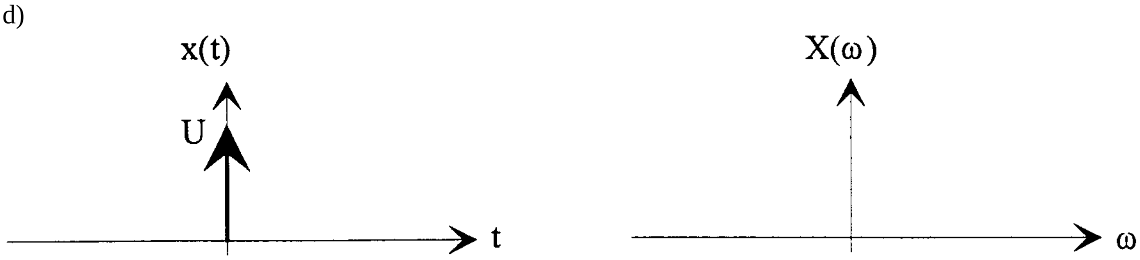
b)



c)

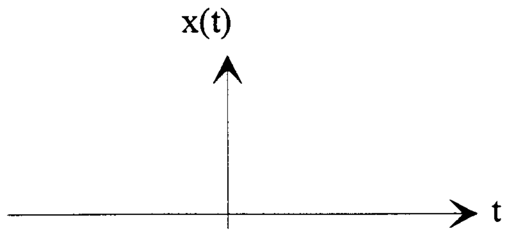


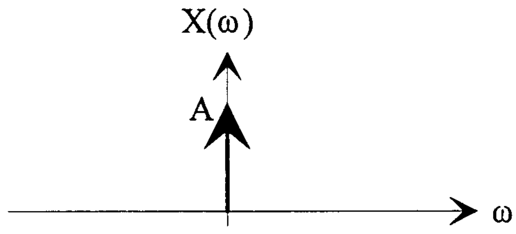
d)



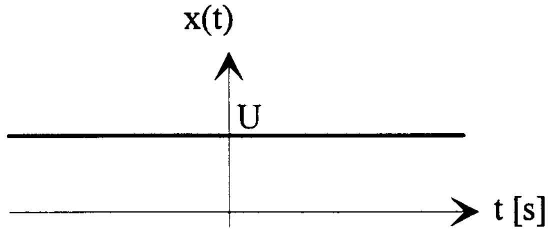
$$x(t) = U \cdot \delta(t)$$

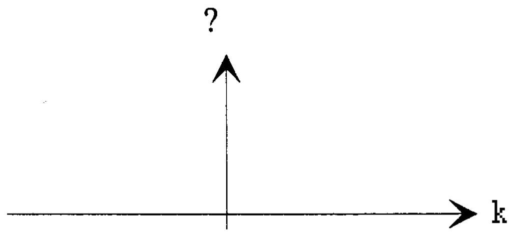
e)



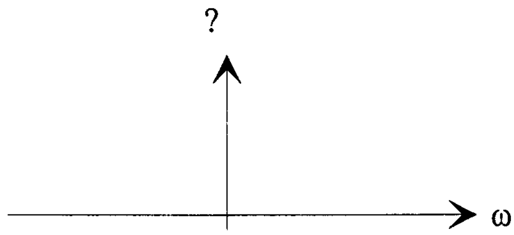


f)



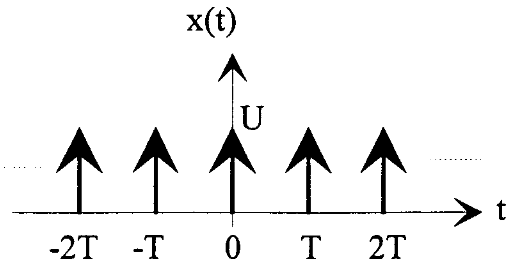


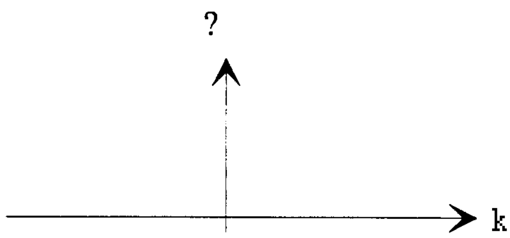
Darstellung als Fourierreihe



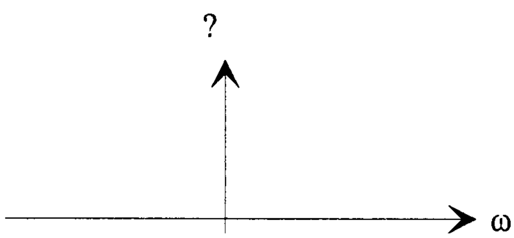
Darstellung als Fouriertransformierte

g)





Darstellung als Fourierreihe



Darstellung als Fouriertransformierte

Lösungen

1. $y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ t & (0<t<1) \\ 1 & (t>1) \end{cases}$

2. $y(t) = \frac{2}{3}\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(2t)$

3. $X_3(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{3}\left(X_1\left(k\frac{\pi}{3}\right) + X_2\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)\delta\left(\omega - k\frac{\pi}{3}\right)$

4. ...

5. $y_2(t) = \delta(t-4) - e^{-2(t-4)}\varepsilon(t-4)$

6. a) ...
   b) ...
   c) ...

7. a) $X(\omega) = \left\{\begin{array}{ll} U\tau\,\dfrac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} & (\omega\neq 0) \\ U\tau & (\omega=0) \end{array}\right\} = U\tau\ \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

   b) $x(t) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{A\Omega}{\pi}\,\dfrac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} & (t\neq 0) \\ \dfrac{A\Omega}{\pi} & (t=0) \end{array}\right\} = \frac{A\Omega}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\Omega t)$

   c) $X(\omega) = \frac{2\pi U\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega-k\omega_0)$ $\qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T}$

   d) $X(\omega) = U$

   e) $x(t) = \frac{A}{2\pi}$

   f) Fourier-Reihe: $c_0 = U,\ c_k = 0\ (k\neq 0)$
   Fourier-Transformierte: $X(\omega) = 2\pi U\,\delta(\omega)$

   g) Fourier-Reihe: $c_k = \frac{U}{T}\ (k \in Z)$
   Fourier-Transformierte: $X(\omega) = \frac{2\pi U}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$ $\qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T}$