# Repetitions-Übung 3 Fourier-Reihen

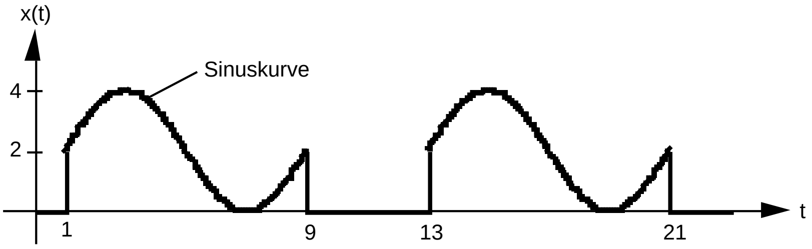
## Aufgaben

1. Gegeben ist die folgende periodische Funktion x(t):

$$x(t) = 2\sin(3t) + 4\cos(15t)$$

a) Bestimmen Sie alle reellen Fourier-Koeffizienten $a_0$, $a_k$ (k  N) und $b_k$ (k  N).
b) Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten $c_k$ (k  Z).

2. Gegeben ist ein Ausschnitt des Grafen einer periodischen Funktion x(t):




Die Funktion x(t) kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0},\ T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

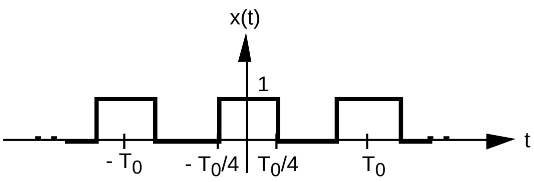
Stellen Sie die für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten $a_0$, $a_k$ und $b_k$ benötigten Integrale auf. Sie sollen die Integrale nur so weit aufbereiten, dass sie jemand berechnen kann, der nichts von Fourier-Reihen versteht und die Funktion x(t) nicht kennt.

3. Jede periodische Funktion x(t) kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0},\ T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

Beurteilen Sie, ob die folgende Behauptung wahr oder falsch ist:
"Wenn alle Koeffizienten $a_k$ (k  N) gleich Null sind, dann kann man folgern, dass x(t) ungerade ist."

4. Gegeben sind das periodische Rechtecksignal x(t) sowie seine komplexen Fourier-Koeffizienten $c_k$ (k  Z):




$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-11,-7,-3,1,5,9,\ldots) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-9,-5,-1,3,7,11,\ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade }\ k \neq 0) \end{cases}$$

Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der mittleren Signalleistung, welcher zusammen im konstanten Anteil, in der Grundschwingung und in den ersten vier Oberschwingungen steckt.

**Lösungen**

1. a) $a_0 = 0$
   $a_5 = 4$, $a_k = 0$ $(k \neq 5)$
   $b_1 = 2$, $b_k = 0$ $(k \neq 1)$

   b) $c_1 = - j$, $c_{-1} = j$, $c_5 = c_{-5} = 2$, $c_k = 0$ $(k \neq \pm 1, \pm 5)$

2. $$a_0 = \frac{1}{12} \int_1^9 \left( 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4}\right) \right) dt$$

$$a_k = \frac{1}{6} \int_1^9 \left( 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4}\right) \right) \cos\left(k \frac{\pi}{6} t\right) \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{6} \int_1^9 \left( 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4}\right) \right) \sin\left(k \frac{\pi}{6} t\right) \, dt$$

3. ...

4. $$\text{Anteil} = \frac{|c_0|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_1|^2 + |c_{-3}|^2 + |c_3|^2 + |c_{-5}|^2 + |c_5|^2}{\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 \, dt} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \frac{518}{225}}{\frac{1}{2}} = 0.967 = 96.7\ \%$$