Repetitions-Übung 1 Komplexe Zahlen, Fourier-Reihen, Fourier-Transformation

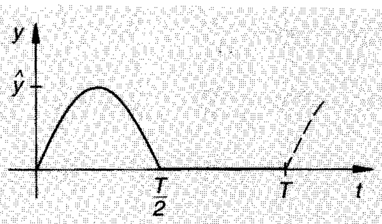
Aufgaben

1. *(Klausur 31.1.2003)*

Im Formelbuch Papula (Seite 188) ist die reelle Fourier-Reihe eines Sinusimpulses aufgeführt:

8. Sinusimpuls (Einweggleichrichtung)

$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 t) & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ & \text{für} \\ 0 & \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

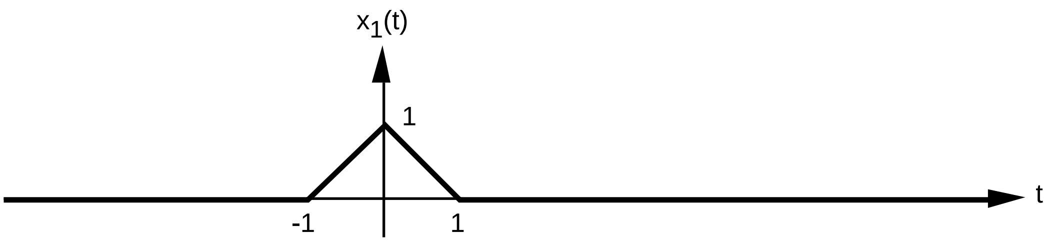


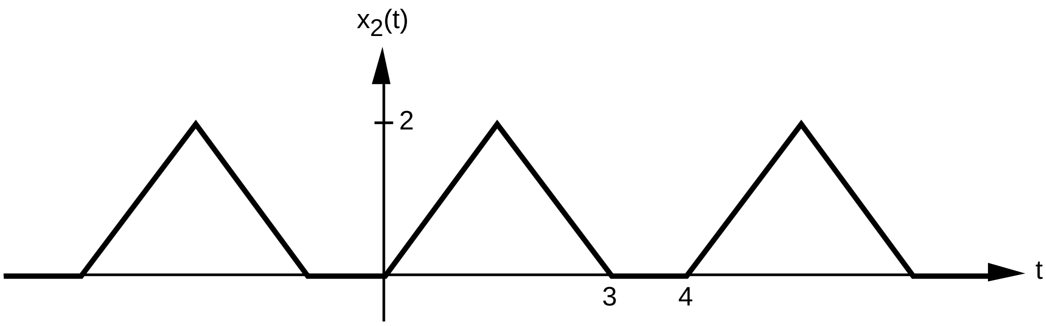
$$y(t) = \frac{\hat{y}}{\pi} + \frac{\hat{y}}{2} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{2\hat{y}}{\pi}\left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \ldots\right)$$

Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) der Funktion y(t).

2. *(Klausur 31.1.2003)*

Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:





Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_2(\omega)$ von $x_2(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen $X_2(\omega)$ und $X_1(\omega)$ in Form einer Formel $X_2(\omega)$ = ... an, mit welcher man $X_2(\omega)$ aus $X_1(\omega)$ bestimmen kann.

3. *(Klausur 1.2.2002)*

Bei der Diskretisierung von LTI-Systemen kommt die folgende Funktion f vor:

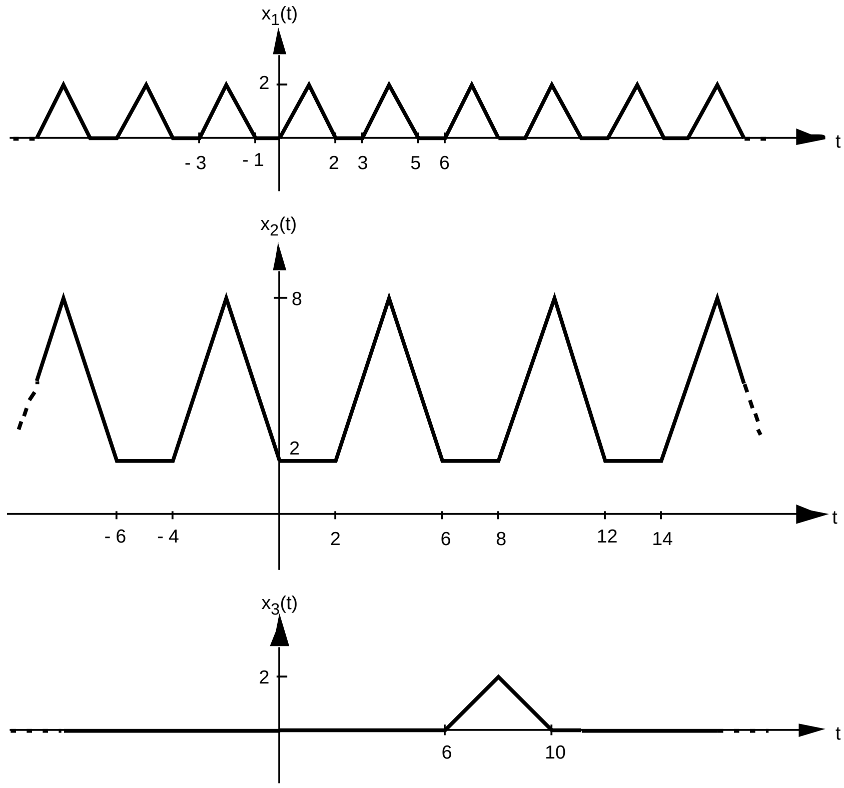
$$f: \quad C \rightarrow C$$
$$s \rightarrow z = f(s) = \frac{1}{1-sT} \quad (T \ \ R^+)$$

Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

"Die Funktion f bildet die Menge {s C | Re(s) = 0} auf die Menge {z C | |z| = 1} ab, d.h. jede komplexe Zahl s mit Re(s) = 0 wird auf eine komplexe Zahl z mit |z| = 1 abgebildet."

4. *(Klausur 1.2.2002)*

Gegeben seien die Grafen der beiden periodischen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sowie der Graf der aperiodischen Funktion $x_3(t)$:



a) Es sei angenommen, dass man die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ kennt.

Drücken Sie die Fourier-Koeffizienten c_{1k} (k Z) der Funktion $x_1(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten c_{1k} (k Z) und $X_3(\omega)$ in Form einer Formel c_{1k} = ... an, mit welcher man die Koeffizienten c_{1k} (k Z) aus $X_3(\omega)$ bestimmen kann.

b) Es sei nun angenommen, dass man alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} (k Z) der Funktion $x_1(t)$ kennt.

Drücken Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{2k} (k Z) der Funktion $x_2(t)$ durch die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} (k Z) der Funktion $x_1(t)$ aus.

(Fortsetzung Seite 3)

Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der beiden Funktionen in Form einer Formel c_{2k} = ... an, mit welcher man die Koeffizienten c_{2k} $(k \; Z)$ aus den Koeffizienten c_{1k} $(k \; Z)$ bestimmen kann.

5. *(Klausur 2.3.2001)*

Gegeben ist die folgende periodische Funktion x(t):

$$x(t) = 2 + \sin(9t) - 3\cos(6t)$$

Die Funktion kann sowohl in eine reelle als auch in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt werden:

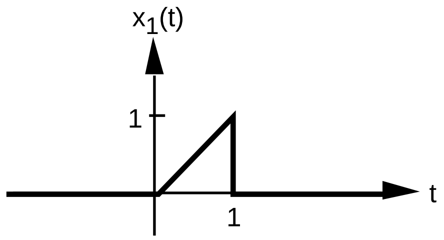
$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right)$$

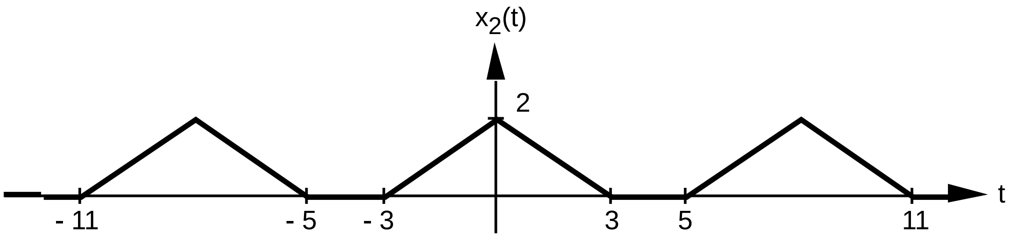
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k, b_k und c_k der Funktion x(t).

6. *(Klausur 2.3.2001)*

Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:





a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$ von Hand.

Als Hilfsmittel sind nur eine Integrationstabelle erlaubt, jedoch keine Fourier-Transformations-Tabelle und kein Taschenrechner.

b) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $x_2(t)$ aus der Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$.

Sie sollen also die Koeffizienten c_k weder von Grund auf berechnen noch eine Fourier-Reihen-Tabelle verwenden.

Benützen Sie jedoch die Kenntnis von $X_1(\omega)$ sowie die Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Betrachten Sie $X_1(\omega)$ als bekannt, auch wenn Sie in der Augabe a) kein Resultat erhalten haben sollten. Der explizite Ausdruck für $X_1(\omega)$ ist unwesentlich, da Sie lediglich den Zusammenhang zwischen $X_1(\omega)$ und den Koeffizienten c_k aufzeigen sollen.

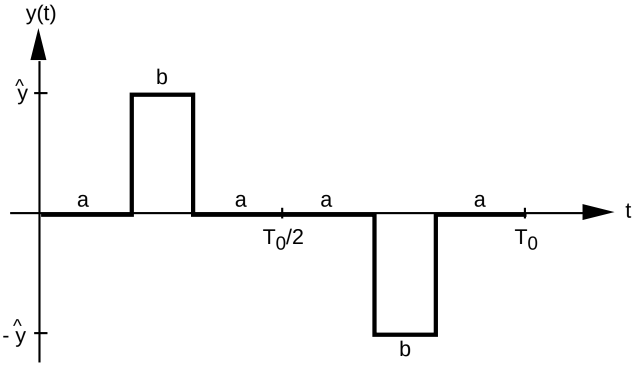
7. *(Klausur 8.12.2000)*

Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage für jede komplexe Zahl z wahr oder falsch ist:

$$| j\cdot z + z^* |^2 = 2\cdot|z|^2 - 2\cdot \mathrm{Im}(z^2)$$

8. *(Klausur 8.12.2000)*

In einem Formelbuch ist die folgende periodische Funktion y(t) und deren reelle Fourier-Reihe $FR\big(y(t)\big)$ aufgeführt:



$$FR\big(y(t)\big) = \frac{4\hat{y}}{\pi}\left(\frac{\cos(\omega_0 a)}{1}\sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 a)}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{\cos(5\omega_0 a)}{5}\sin(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$

wobei: $\omega_0 := \dfrac{2\pi}{T_0}$

T_0 = Grundperiode

Prüfen Sie die Fourier-Reihe nach, indem Sie die Fourier-Koeffizienten b_k (= Koeffizienten der Sinus-Glieder) von Hand, d.h. ohne Taschenrechner, berechnen.

Auftretende Integrale müssen nicht auf Grundintegrale zurückgeführt werden, sondern Sie können dazu Integraltafeln verwenden.

Lösungen

1. $$c_k = \begin{cases} \dfrac{\hat{y}}{\pi} & (k = 0) \\ -\dfrac{\hat{y}}{\pi}\dfrac{1}{k^2-1} & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \\ -j\,\dfrac{\hat{y}}{4} & (k = 1) \\ j\,\dfrac{\hat{y}}{4} & (k = -1) \\ 0 & (k \text{ ungerade} \quad k \neq \pm 1) \end{cases}$$

2. $$X_2(\omega) = \frac{3\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(3\pi/4)}\, X_1\!\left(k\,\frac{3\pi}{4}\right) \delta\!\left(\omega - k\,\frac{\pi}{2}\right)$$

3. falsch

4. a) $c_{1k} = \dfrac{1}{6} X_3\!\left(k\,\dfrac{\pi}{3}\right)$

   b) $$c_{2k} = \begin{cases} 3\,c_{10} + 2 & (k=0) \\ 3\,e^{jk(2\pi/3)}\,c_{1k} & (k\neq 0) \end{cases}$$

5. $a_0 = 2$ $\quad$ $a_2 = -3$ $\quad$ $a_k = 0 \; (k\neq 2)$

   $b_3 = 1$ $\quad$ $b_k = 0 \; (k\neq 3)$

   $c_0 = 2$ $\quad$ $c_2 = -\dfrac{3}{2}$ $\quad$ $c_k = 0 \; (k \neq \pm 2, \pm 3)$

   $c_{-2} = -\dfrac{3}{2}$

   $c_3 = -\dfrac{j}{2}$

   $c_{-3} = \dfrac{j}{2}$

6. a) $$X(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\omega}(-\,j\omega - 1) + 1\right) & (\omega\neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (\omega = 0) \end{cases}$$

   b) $$c_k = \frac{3}{4}\left(e^{jk(3\pi/4)}\, X_1\!\left(k\,\frac{3\pi}{4}\right) + e^{-jk(3\pi/4)}\, X_1\!\left(-\,k\,\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

7. wahr

8. $$b_k = \begin{cases} 0 & (k \text{ gerade}) \\ \dfrac{4\hat{y}}{k\pi}\cos(k\omega_0 a) & (k \text{ ungerade}) \end{cases}$$