Übung 30 LTD-System
Pole der Übertragungsfunktion, Kausalität, Stabilität

Lernziele

- die Zusammenhänge zwischen den Polen der Übertragungsfunktion eines LTD-Systems und der Kausalität bzw. Stabilität des Systems kennen und bei der Analyse eines LTD-Systems anwenden können.
- den Output eines LTD-Systems bei bekanntem Input und bekannter Übertragungsfunktion bestimmen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.

Aufgaben

1. Von der Übertragungsfunktion H(z) eines **kausalen** LTD-Systems sei die Lage der Pole in der komplexen Zahlenebene bekannt.

   Beurteilen Sie, was man über die **Stabilität** des Systems aussagen kann, falls

   a) alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen.

   b) einige Pole innerhalb und einige ausserhalb des Einheitskreises liegen.

   c) alle Pole ausserhalb des Einheitskreises liegen.

2. Ein kausales LTD-System sei durch die folgende Differenzengleichung beschrieben:

   $$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

   a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion H(z).

   b) Bestimmen Sie die Pole von H(z), und geben Sie den Konvergenzbereich von H(z) an.

   c) Bestimmen Sie die Impulsantwort h[n].

   d) Beurteilen Sie, ob das System stabil ist oder nicht.

3. Die Übertragungsfunktion H(z) eines LTD-Systems sei eine gebrochen rationale Funktion in z^{-1} mit reellen Koeffizienten.

   Beurteilen Sie die folgende Behauptung:
   Wenn z_1 ein Pol von H(z) ist, dann ist auch die komplex konjugierte Zahl z_1^* ein Pol von H(z).

4. Gegeben ist die Übertragungsfunktion H(z) eines kausalen LTD-Systems:

   $$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)}$$

   wobei die Fourier-Transformierte $H_a(\omega)$ existieren soll, sowie das Eingangssignal

   $$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon[n]$$

   Bestimmen Sie das Ausgangssignal y[n] mit der angegebenen Methode.

   a) mit Hilfe der Faltung, d.h. y[n] = x[n] * h[n]

   b) mit Hilfe der Differenzengleichung und der rekursiven Methode

   c) mit Hilfe des Faltungssatzes der z-Transformation

Lösungen

1. a) i.A. keine Aussage möglich
   stabil, falls H(z) gebrochen rational in z^{-1}

   b) nicht stabil

   c) nicht stabil

2. a) $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}$

   b) Pole bei $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

   Konvergenzbereich $|z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

   c) $h[n] = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \varepsilon[n]$

   d) nicht stabil

3. ...

4. a) $h[n] = \left(-9 \left(\frac{1}{4}\right)^n + 10 \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) \varepsilon[n]$

   $y[n] = x[n] * h[n] = \left(9 \left(\frac{1}{4}\right)^n - 20 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 12 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \varepsilon[n]$

   b) $y[n] - \frac{7}{12} y[n-1] + \frac{1}{12} y[n-2] = x[n] + \frac{1}{2} x[n-1]$

   $y[n] = 0 \quad (n<0)$
   $y[0] = 1$
   $y[2] = \frac{19}{12}$
   $y[3] = \frac{133}{144}$
   ...

   c) $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$

   $$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}$$
   $$= 9 \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} - 20 \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} + 12 \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

   $y[n] = \left(9 \left(\frac{1}{4}\right)^n - 20 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 12 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \varepsilon[n]$