

## Übung 26                      z-Transformation Eigenschaften der z-Transformation

### Lernziel

- die Eigenschaften der z-Transformation bei der Bestimmung der z-Transformierten einer zeitdiskreten Funktion anwenden können.

### Aufgabe

Lösen Sie für die gegebene zeitdiskrete Funktion  $x[n]$  die folgenden Teilaufgaben:

- i) Bestimmen Sie den algebraischen Ausdruck für die z-Transformierte  $X(z)$ . Benützen Sie dazu lediglich die Transformationstabelle (kopiertes Blatt) sowie die Eigenschaften der z-Transformation.
- ii) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der z-Transformierten  $X(z)$ .
- iii) Geben Sie den algebraischen Ausdruck für die Fourier-Transformierte  $X_a(\omega) = \text{FTA}(x[n])$  an, falls  $X_a(\omega)$  überhaupt existiert.

a)  $x[n] = -3 \cdot [n-3]$

b)  $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n [n+2]$

c)  $x[n] = n^2 a^{2n} [n] \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

d)  $x[n] = \sum_{k=0} [n-3k]$

e)  $x[n] = \cos\left(\frac{2}{5}n + \frac{4}{5}\right) [n+2]$

f)  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n [n]$

**Lösungen**

a) i)  $X(z) = -3 z^{-3} \frac{z}{z-1} = -3 z^{-3} \frac{1}{1-z^{-1}}$

ii)  $|z| > 1$

iii)  $X_a(\ )$  existiert nicht

b) i)  $X(z) = 16 z^2 \frac{z}{z - \frac{1}{4}} = 16 z^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$

ii)  $|z| > \frac{1}{4}$

iii)  $X_a(\ ) = 16e^{j2T} \frac{e^{jT}}{e^{jT} - \frac{1}{4}}$

c) i)  $X(z) = \frac{a^2 z(z+a^2)}{(z-a^2)^3}$

ii)  $|z| > a^2$

iii)  $|a| < 1$  :  $X_a(\ ) = \frac{a^2 e^{jT} (e^{jT} + a^2)}{(e^{jT} - a^2)^3}$

$|a| = 1$  :  $X_a(\ )$  existiert nicht

d) i)  $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-3}}$

ii)  $|z| > 1$

iii)  $X_a(\ )$  existiert nicht

e) i)  $X(z) = z^2 \frac{1 - z^{-1} \cos\left(\frac{2}{5}\right)}{1 - 2 z^{-1} \cos\left(\frac{2}{5}\right) + z^{-2}}$

ii)  $|z| > 1$

iii)  $X_a(\ )$  existiert nicht

f) i)  $X(z) = \frac{2 - \frac{3}{4} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)} = \frac{2z^2 - \frac{3}{4} z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$

ii)  $|z| > \frac{1}{2}$

iii)  $X_a(\ ) = \frac{2 - \frac{3}{4} e^{-jT}}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-jT}\right)\left(1 - \frac{1}{4} e^{-jT}\right)} = \frac{2e^{j2T} - \frac{3}{4} e^{jT}}{\left(e^{jT} - \frac{1}{2}\right)\left(e^{jT} - \frac{1}{4}\right)}$