

Übung 22 Periodische Fortsetzung Faltung mit Deltafolge, Fourier-Koeff. einer period. fortges. Funktion

Lernziele

- verstehen, dass eine Funktion sowohl durch Aufaddieren zeitverschobener Versionen der Funktion als auch durch Faltung mit einer Deltafolge periodisch fortgesetzt werden kann.
- verstehen, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten einer periodisch fortgesetzten Funktion Abtastwerte der Fourier-Transformierten der ursprünglichen Funktion sind.
- die komplexen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion bestimmen, welche durch periodisches Fortsetzen einer aperiodischen Funktion gebildet wurde.

Einleitung

Eine Funktion $x_0(t)$ wird mit der Grundperiode T_0 periodisch fortgesetzt, indem Teilfunktionen $x_0(t-kT_0)$ ($k \in \mathbb{Z}$), welche man durch entsprechende Zeitverschiebungen von $x_0(t)$ gewinnt, aufaddiert werden. Man erhält so die periodische Funktion $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t-kT_0) \quad (1)$$

Die periodische Fortsetzung von $x_0(t)$ kann auch durch eine Faltung von $x_0(t)$ mit einer Deltafolge erreicht werden:

$$x(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0) \quad (2)$$

Aufgaben

Faltung mit Deltafolge

- a) Skizzieren Sie untereinander die Grafen der folgenden Funktionen:
 - beliebige, periodisch fortzusetzende Funktion $x_0(t)$.
 - Deltafolge $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0)$
 - periodisch fortgesetzte Funktion $x(t)$.
- b) Zeigen Sie, dass die rechten Seiten der Beziehungen (1) und (2) identisch sind.
Hinweis:
Führen Sie die Faltung in (2) im Zeitbereich aus.

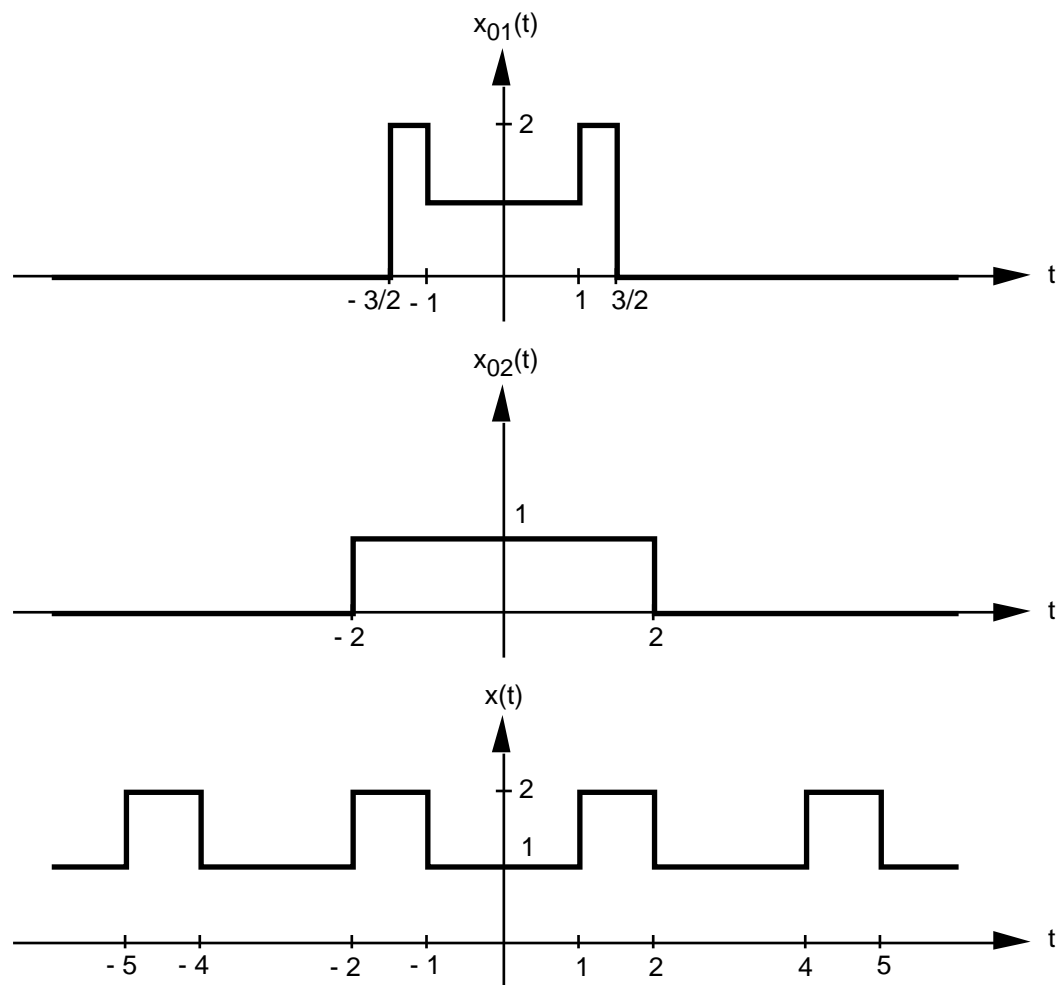
Fourier-Koeffizienten einer periodisch fortgesetzten Funktion

- Im Unterricht wurde bewiesen, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k von $x(t)$ Abtastwerte der Fourier-Transformierten $X_0(\omega)$ von $x_0(t)$ sind:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_0(k \omega_0) \quad (3)$$

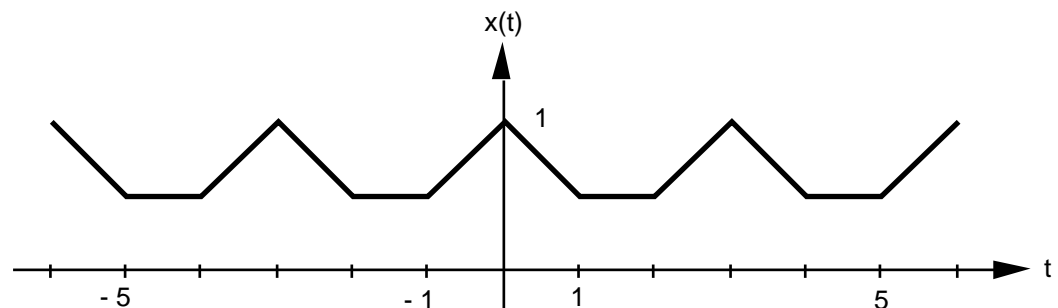
Die Beziehung (3) gilt unabhängig davon, ob sich die Teilfunktionen $x_0(t-kT_0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) "überlappen" oder nicht.

Betrachten Sie nun die Grafen der Funktionen $x_{01}(t)$, $x_{02}(t)$ und $x(t)$:



- Prüfen Sie nach, dass $x(t)$ eine periodische Fortsetzung sowohl von $x_{01}(t)$ ("ohne Überlappung") als auch von $x_{02}(t)$ ("mit Überlappung") ist.
- Prüfen Sie nach, dass die Beziehung (3) für beide Funktionen $x_{01}(t)$ und $x_{02}(t)$ gilt.

3. Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion $x(t)$:



- Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) von $x(t)$. Drücken Sie c_k allgemein in Abhängigkeit von k aus.
- Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{Z}$, für welche gilt: $c_k = 0$

Lösungen

1. a) i) ...
ii) ...
iii) ...
b) ...

2. a) ... ($T_0 = 3$)

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{3} \int_{-3/2}^{3/2} x(t) \cdot e^{-jk(2\pi/3)t} dt = \begin{cases} -\frac{\sin\left(k\frac{2}{3}\right)}{k} & (k \neq 0) \\ \frac{4}{3} & (k=0) \end{cases}$$

$$x_{01}(t) : X_{01}(\omega) = \begin{cases} \frac{4 \sin\left(\frac{3}{2}\omega\right) - 2 \sin(\omega)}{4} & (\omega \neq 0) \\ \dots & (\omega = 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{T_0} X_{01}(k\omega_0) = \frac{1}{3} X_{01}\left(k\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} -\frac{\sin\left(k\frac{2}{3}\right)}{k} & (k \neq 0) \\ \frac{4}{3} & (k=0) \end{cases} = c_k$$

$$x_{02}(t) : X_{02}(\omega) = \begin{cases} \frac{2 \sin(2\omega)}{4} & (\omega \neq 0) \\ \dots & (\omega = 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{T_0} X_{02}(k\omega_0) = \frac{1}{3} X_{02}\left(k\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} \frac{\sin\left(k\frac{4}{3}\right)}{k} & (k \neq 0) \\ \frac{4}{3} & (k=0) \end{cases} = c_k$$

Bem.: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin\left(k\frac{4}{3}\right) = -\sin\left(k\frac{2}{3}\right)$$

$$3. a) c_k = \frac{2}{3} \operatorname{sinc}^2\left(k\frac{2}{3}\right) = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{\sin^2\left(k\frac{2}{3}\right)}{\left(k\frac{2}{3}\right)^2} & (k \neq 0) \\ \frac{2}{3} & (k=0) \end{cases}$$

- b) $k = \dots, -12, -9, -6, -3, 3, 6, 9, 12, \dots$