Übung 20 Fourier-Transformation für Abtastsignale (FTA) Abtasttheorem, Rekonstruktion

Lernziele

- neue Sachverhalte bearbeiten können.
- das Abtasttheorem von Shannon kennen und verstehen.
- verstehen, dass bei nicht-erfülltem Abtasttheorem die ursprüngliche zeitkontinuierliche Funktion aus der abgetasteten Funktion nicht mehr rekonstruiert werden kann.
- verstehen, dass verschiedene Funktionen bei gleicher Abtastperiode auf gleiche Abtastfunktionen führen können.

Aufgaben

Abtasttheorem, Rekonstruktion

1. Studieren Sie im Buch *Meyer* den Abschnitt *5.2.4 Das Abtasttheorem* (Seiten 140 bis 142) sowie die ersten vier Zeilen des Abschnittes *5.2.6 Die Rekonstruktion von abgetasteten Signalen* (Seite 144).

2. Gegeben ist die zeitkontinuierliche Funktion $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.

   Aus $x(t)$ erhält man die abgetastete Funktion $x_a(t)$, indem man $x(t)$ mit der Abtastperiode T bzw. mit der Abtastfrequenz $\omega_a := 2\pi/T$ abtastet.

   Aus $x_a(t)$ erhält man die Funktion $y(t)$, indem man $x_a(t)$ mit einem idealen Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz $\omega_a/2$ filtert und mit dem Faktor T gewichtet. Das Tiefpassfilter inklusive Gewichtung kann dabei als LTI-System aufgefasst werden mit dem Frequenzgang $H(\omega)$.

   Wenn bei der Abtastung das Abtasttheorem erfüllt ist, ist $y(t)$ die ursprüngliche Funktion $x(t)$, d.h. $y(t) = x(t)$.

   a) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ der Funktion $x(t)$.

   Nehmen Sie nun an, das **Abtasttheorem** sei **erfüllt**, d.h. es gelte $\omega_a > 2\omega_0$.

   b) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ der abgetasteten Funktion $x_a(t)$.

   c) Zeichnen Sie den Grafen des Frequenzganges $H(\omega)$ des Tiefpassfilters inklusive Gewichtung.

   d) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $Y(\omega)$ der Funktion $y(t)$.
   Stellen Sie dabei fest, dass $Y(\omega) = X(\omega)$ und somit $y(t) = x(t)$ gilt.

   Nehmen Sie nun an, das **Abtasttheorem** sei **nicht erfüllt**, d.h. es gelte $\omega_a < 2\omega_0$.

   e) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ der abgetasteten Funktion $x_a(t)$.

   f) Zeichnen Sie den Grafen des Frequenzganges $H(\omega)$ des Tiefpassfilters inklusive Gewichtung.

   g) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $Y(\omega)$ der Funktion $y(t)$.
   Stellen Sie dabei fest, dass $Y(\omega) \neq X(\omega)$ und somit $y(t) \neq x(t)$ gilt.

Verschiedene Funktionen → gleiche Abtastfunktionj

3. Gegeben ist das folgende Fourier-Transformiertenpaar (*Meyer*, Tabelle Seite 51):

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(t)}{t} & (t \neq 0) \\ \frac{1}{\pi} & (t = 0) \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega|<1) \\ 0 & (|\omega|>1) \end{cases}$$

Tastet man x(t) mit der Abtastperiode T bzw. mit der Abtastfrequenz $\omega_a := 2\pi/T$ ab, wobei das Abtasttheorem erfüllt sein soll, so erhält man die Abtastfunktion $x_a(t)$.

a) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ der Funktion x(t).

b) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ der abgetasteten Funktion $x_a(t)$.

Es gibt unendlich viele andere, von x(t) unterschiedliche Funktionen, die auf die gleiche Abtastfunktion $x_a(t)$ führen, wenn man sie mit der gleichen Periode abtastet wie x(t).

c) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $Y(\omega)$ einer solchen Funktion y(t). Betrachten Sie also den in b) gezeichneten Grafen von $X_a(\omega)$, und finden Sie daraus den Grafen einer Fourier-Transformierten $Y(\omega)$, so dass $Y_a(\omega) = X_a(\omega)$.

d) Überlegen Sie sich, dass bei der Abtastung der unter c) betrachteten Funktion y(t) das Abtasttheorem nicht erfüllt ist.

Lösungen

1. …

2. a) …
   b) …
   c) …
   d) …

3. a) …
   b) …
   c) …
   d) …