

## Übung 17                      **Fourier-Transformation** **Modulation**

### Lernziele

- das Spektrum eines modulierten Signals mit Hilfe der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation bestimmen können.
- verstehen, wie sich das Modulieren eines Signals mit einem periodischen Signal im Spektrum auswirkt.
- Spektren modulierter Signale ohne Berechnung grafisch skizzieren können.

### Aufgaben

1. Ein beliebiges Signal  $x(t)$  mit Spektrum  $X(\omega)$  wird mit dem folgenden **cosinus-förmigen** Signal  $m(t)$  moduliert:

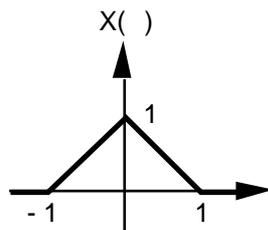
$$m(t) = \cos(\omega_0 t)$$

- Geben Sie das Spektrum  $M(\omega)$  von  $m(t)$  an.
  - Bestimmen Sie mit Hilfe der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation das Spektrum  $X_m(\omega)$  des modulierten Signals  $x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$ .
  - Skizzieren Sie die Grafen von  $X(\omega)$ ,  $M(\omega)$  und  $X_m(\omega)$ . Wählen Sie für  $X(\omega)$  einen beliebigen geeigneten Verlauf.
  - Erklären Sie in eigenen Worten, wie das Spektrum  $X_m(\omega)$  aus dem Spektrum  $X(\omega)$  hervorgeht, bzw. wie sich das Spektrum eines beliebigen Signals verändert, wenn man das Signal mit einem cosinus-förmigen Signal moduliert.
2. Ein beliebiges Signal  $x(t)$  mit Spektrum  $X(\omega)$  wird mit einem beliebigen **periodischen** Signal  $m(t)$  moduliert.  
 $m(t)$  kann durch seine komplexe Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk \omega_0 t}$$

- Geben Sie das Spektrum  $M(\omega)$  von  $m(t)$  an.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation das Spektrum  $X_m(\omega)$  des modulierten Signals  $x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$ .
- Skizzieren Sie die Grafen von  $X(\omega)$ ,  $M(\omega)$  und  $X_m(\omega)$ . Wählen Sie für  $X(\omega)$  einen beliebigen geeigneten Verlauf.
- Erklären Sie in eigenen Worten, wie das Spektrum  $X_m(\omega)$  aus dem Spektrum  $X(\omega)$  hervorgeht, bzw. wie sich das Spektrum eines beliebigen Signals verändert, wenn man das Signal mit einem beliebigen periodischen Signal moduliert.

3. Gegeben ist das Spektrum  $X(\omega)$  des Signals  $x(t)$ :



Das Signal wird mit dem Signal  $m(t)$  moduliert.

Bestimmen Sie den grafischen Verlauf des Spektrums des modulierten Signals  $x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$ .

a)  $m(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

b)  $m(t) = \cos(t)$

c)  $m(t) = \delta(t-k)$   
 $k \in \mathbb{R}$

d)  $m(t) = \delta(t-2k)$   
 $k \in \mathbb{R}$

4. Das Signal  $x(t)$  wird mit dem Signal  $m(t)$  moduliert:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$m(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < T_1) \\ 0 & (|t| > T_1) \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie die Grafen der Signale  $x(t)$  und  $m(t)$ .
- b) Skizzieren Sie die Spektren  $X(\omega)$  und  $M(\omega)$  der Signale  $x(t)$  und  $m(t)$ .
- c) Skizzieren Sie das Spektrum  $X_m(\omega)$  des modulierten Signals  $x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$ .  
 Sie sollen das Spektrum  $X_m(\omega)$  **nicht berechnen** sondern direkt grafisch skizzieren, indem Sie Ihre Erkenntnisse aus den Aufgaben 1 bis 3 anwenden.

**Lösungen**

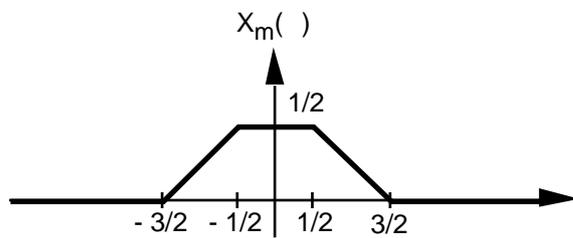
1. a)  $M(\omega) = X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)$   
 b)  $X_m(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0)$   
 c) ...  
 d) ...

2. a)  $M(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X(\omega - k\omega_0)$

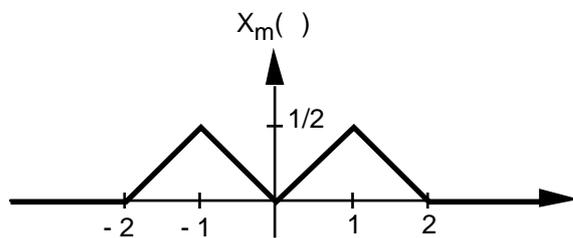
b)  $X_m(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X(\omega - k\omega_0)$

- c) ...  
 d) ...

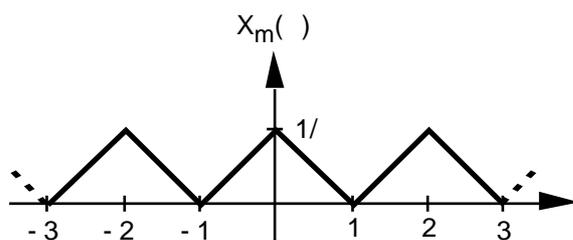
3. a)



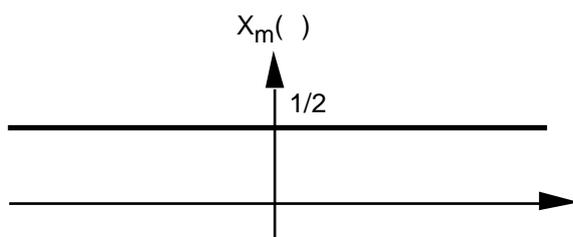
- b)



- c)



- d)



4. siehe Meyer Seite 45