Übung 16 — Fourier-Transformation
Faltungseigenschaft, Sinusförmiger Input an LTI-Systemen

Lernziele

- die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation kennen und verstehen.
- die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation anwenden können.
- verstehen, warum die Fourier-Transformierte der Stossantwort eines LTI-Systems als Frequenzgang bezeichnet wird.
- verstehen, dass die Reihenfolge zweier oder mehrerer hintereinander geschalteter LTI-Systeme vertauscht werden kann.
- verstehen, dass dass ein LTI-System mit reeller Stossantwort einen sinusförmigen Input in einen sinusförmigen Output mit derselben Frequenz überführt.
- bei einem LTI-System mit bekanntem Frequenzgang den Output zu einem sinusförmigen Input bestimmen können.
- verstehen, dass ein RC-Glied ein Tiefpassfilter ist.

Einleitung

Die Fourier-Transformation FT hat die folgende **Faltungseigenschaft** (ohne Beweis):

$$FT\Big(x_1(t) * x_2(t)\Big) = FT\Big(x_1(t)\Big) \cdot FT\Big(x_2(t)\Big)$$

oder anders geschrieben:

$$x_1(t) * x_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

d.h. die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen ist gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten der einzelnen Funktionen.

Aufgaben

Faltungseigenschaft

1. Prüfen Sie die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation am Beispiel des folgenden LTI-Systems nach:

   Stossantwort $h(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$
   Input $x(t) = e^{-2t}\,\varepsilon(t)$

   Anleitung:

   i) Schlagen Sie in einer Tabelle die Fourier-Transformierte $H(\omega)$ von $h(t)$ nach.

   ii) Schlagen Sie in einer Tabelle die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von $x(t)$ nach.

   iii) Bestimmen Sie das Produkt $H(\omega)\cdot X(\omega)$.

   iv) Bestimmen Sie den Output $y(t)$, indem Sie $h(t)$ und $x(t)$ falten, d.h. $y(t) = h(t) * x(t)$.

   v) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $Y(\omega)$ von $y(t)$.
   Überzeugen Sie sich davon, dass das Resultat mit demjenigen aus iii) übereinstimmt, d.h. dass gilt: $Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$

2. Bei einem LTI-System erhält man das Spektrum $Y(\omega)$ des Outputs $y(t)$, indem man das Spektrum $X(\omega)$ des Inputs $x(t)$ mit dem sogenannten **Frequenzgang H(ω)** des LTI-Systems multipliziert.

   a) Erklären Sie, inwiefern die Funktion $H(\omega)$ ein "Frequenzverhalten" des LTI-Systems ausdrückt. Überlegen Sie sich dazu, wie das LTI-System den Input $x(t)$ bezüglich seiner Frequenzanteile beeinflusst.

   b) (siehe Seite 2)

b) Skizzieren Sie den Frequenzgang $H(\omega)$ eines idealen **Tiefpassfilters**.
Ein ideales Tiefpassfilter ist ein LTI-System, welches alle Frequenzanteile bis zu einer bestimmten maximalen Frequenz durchlässt und alle Anteile höherer Frequenzen unterdrückt.

c) Skizzieren Sie den Frequenzgang $H(\omega)$ eines idealen **Hochpassfilters**.
Ein ideales Hochpassfilter ist ein LTI-System, welches alle Frequenzanteile ab einer bestimmten minimalen Frequenz durchlässt und alle Anteile tieferer Frequenzen unterdrückt.

d) Skizzieren Sie den Frequenzgang $H(\omega)$ eines idealen **Bandpassfilters**.
Ein ideales Bandpassfilter ist ein LTI-System, welches alle Frequenzanteile zwischen einer minimalen und einer maximalen Frequenz durchlässt und alle Anteile unterdrückt, welche ausserhalb dieses Frequenzbandes liegen.

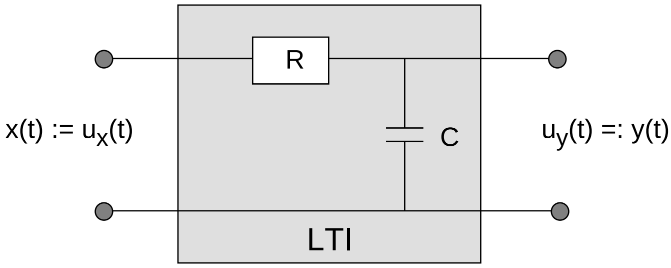
3. Gegeben sind zwei beliebige LTI-Systeme mit den Stossantworten $h_1(t)$ und $h_2(t)$ bzw. den Frequenzgängen $H_1(\omega)$ und $H_2(\omega)$.

Schaltet man die beiden LTI-Systeme hintereinander, so ergibt sich gesamthaft ein neues LTI-System mit dem Frequenzgang $H(\omega)$.

a) Zeigen Sie, dass $H(\omega)$ gegeben ist durch $H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$.

b) Erklären Sie mit Hilfe des Resultates aus a), dass der Frequenzgang $H(\omega)$ nicht von der Reihenfolge abhängt, in welcher man die beiden LTI-Systeme hintereinander schaltet.

c) Ein Beispiel eines LTI-Systems ist das folgende RC-Glied (vgl. Unterricht):



Skizzieren Sie das Schaltbild eines LTI-Systems, welches aus drei hintereinander geschalteten RC-Gliedern besteht.

Sinusförmiger Input an LTI-Systemen

4. Gegeben sind ein LTI-System mit einer **reellen** Stossantwort $h(t)$ sowie der sinusförmige Input $\mathbf{x(t) = \hat{x}\,\sin(\omega_0 t+\phi)}$.

Bestimmen Sie den Output $y(t)$.
Zeigen Sie, dass $y(t)$ eine **sinusförmige** Funktion ist mit derselben Frequenz ω_0 wie der Input $x(t)$.

Anleitung:

i) Formen Sie $x(t)$ gemäss Euler in eine Summe komplexer Exponentialfunktionen um.

ii) Bestimmen Sie den Output $y(t)$, indem Sie ausnützen, dass
- ein LTI-System linear ist.
- komplexe Exponentialfunktionen Eigenfunktionen eines LTI-Systems sind (vgl. Unterricht).

iii) Schreiben Sie den Frequenzgang $H(\omega)$ in der Polarform $H(\omega) = R(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$
mit $R(\omega) := |H(\omega)|$, $\varphi(\omega) := \arg(H(\omega))$.

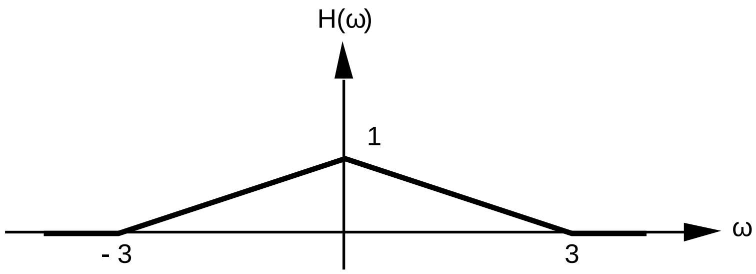
iv) Verwenden Sie, dass $R(\omega)$ eine gerade und $\varphi(\omega)$ eine ungerade Funktion ist.
Dies gilt unter der Voraussetzung, dass $h(t)$ reell ist (ohne Beweis).

v) Formen Sie $y(t)$ gemäss Euler in eine Sinus-Funktion um.

5. Gegeben ist der Input x(t) eines LTI-Systems sowie der Frequenzgang H(ω) des LTI-Systems.

Bestimmen Sie den zum Input x(t) gehörigen Output y(t), indem Sie das Ergebnis der Aufgabe 4 anwenden.

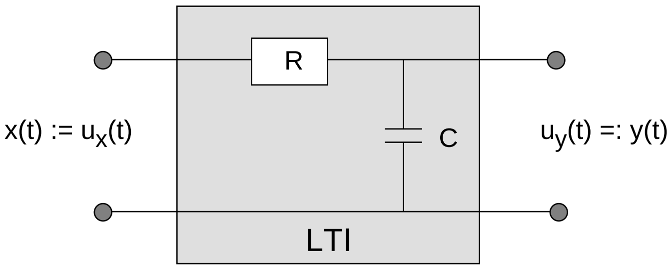
a) $x(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t)$



b) $x(t) = 2\sin(3t+4)$

$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

6. Das abgebildete RC-Glied kann als LTI-System aufgefasst werden (vgl. Unterricht oder Aufgabe 3c)).



Der Frequenzgang H(ω) dieses RC-Gliedes lautet wie folgt (ohne Herleitung):

$H(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$

a) Bestimmen Sie den Betrag $|H(\omega)|$ des Frequenzganges H(ω).

b) Skizzieren Sie grob den Grafen von $|H(\omega)|$.

c) Erklären Sie anhand des in b) skizzierten Grafen, dass das LTI-System ein Tiefpassfilter ist.

d) Am System mit den Parameterwerten R = 1.0 kΩ und C = 0.10 μF werde der Input $x(t) = \sin(\omega t)$ angelegt.
Bestimmen Sie die Grenzfrequenz $f_{max} = \omega_{max}/2\pi$, ab welcher die mittlere Leistung des Outputs y(t) nur noch die Hälfte der mittleren Leistung des Inputs beträgt.

Lösungen

1. i) $H(\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$

   ii) $X(\omega) = \dfrac{1}{2+j\omega}$

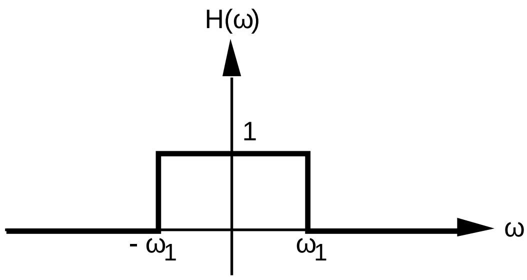
   iii) $H(\omega)\cdot X(\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$

   iv) $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\ \varepsilon(t)$

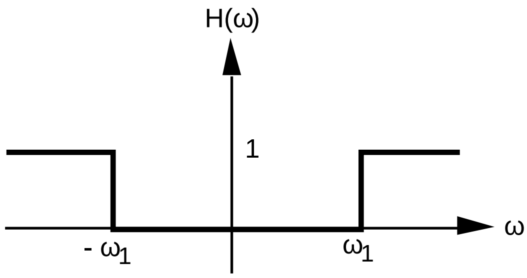
   v) $Y(\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = H(\omega)\cdot X(\omega)$

2. a) $H(\omega_0)$, d.h. der Wert der Funktion $H(\omega)$ an der Stelle $\omega = \omega_0$, bestimmt den Einfluss des LTI-Systems auf den Input x(t) bezüglich der Frequenz ω_0.
   $H(\omega_0)$ drückt also aus, inwiefern sich der Output y(t) bezüglich der Frequenz ω_0 vom Input x(t) unterscheidet.
   Die Funktion $H(\omega)$ beschreibt also das Verhalten des LTI-Systems bezüglich der Frequenzen ω.

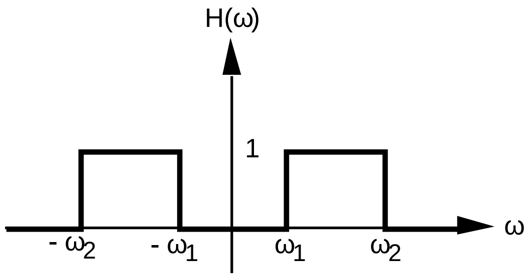
   b)



   c)



   d)



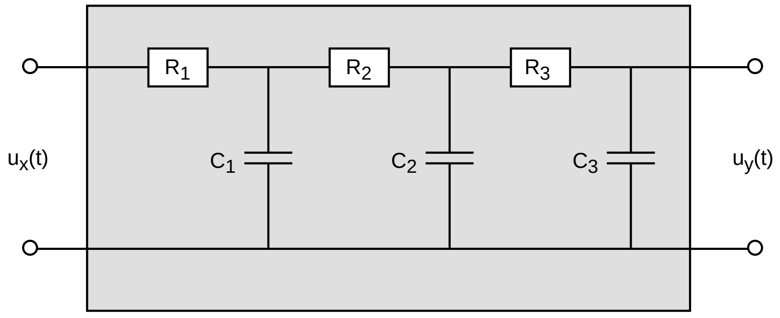
3. a) x(t) := Input
   y(t) := Output nach dem ersten LTI-System = Input vor dem zweiten LTI-System
   z(t) := Output

$$Z(\omega) = H_2(\omega)\cdot Y(\omega) = H_2(\omega)\cdot\Big(H_1(\omega)\cdot X(\omega)\Big) = \Big(H_2(\omega)\cdot H_1(\omega)\Big)\cdot X(\omega) \overset{!}{=} H(\omega)\cdot X(\omega)$$

$$H(\omega) = H_2(\omega)\cdot H_1(\omega) = H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)$$

   b) Reihenfolge der Faktoren $H_1(\omega)$ und $H_2(\omega)$ in a) spielt wegen der Kommutativität der Multiplikation keine Rolle.

c)



4. i) $x(t) = \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(e^{j(\omega_0 t+\phi)} - e^{-j(\omega_0 t+\phi)}\right)$

$= \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(e^{j\phi}\,e^{j\omega_0 t} - e^{-j\phi}\,e^{-j\omega_0 t}\right)$

$= \hat{x}\,\frac{1}{2j}\,e^{j\phi}\,e^{j\omega_0 t} - \hat{x}\,\frac{1}{2j}\,e^{-j\phi}\,e^{-j\omega_0 t}$

ii) $y(t) = \hat{x}\,\frac{1}{2j}\,e^{j\phi}\,H(\omega_0)\,e^{j\omega_0 t} - \hat{x}\,\frac{1}{2j}\,e^{-j\phi}\,H(-\omega_0)\,e^{-j\omega_0 t}$

$= \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(H(\omega_0)\,e^{j(\omega_0 t+\phi)} - H(-\omega_0)\,e^{-j(\omega_0 t+\phi)}\right)$

iii) $y(t) = \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(R(\omega_0)\,e^{j\varphi(\omega_0)}\,e^{j(\omega_0 t+\phi)} - R(-\omega_0)\,e^{j\varphi(-\omega_0)}\,e^{-j(\omega_0 t+\phi)}\right)$

iv) $y(t) = \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(R(\omega_0)\,e^{j\varphi(\omega_0)}\,e^{j(\omega_0 t+\phi)} - R(\omega_0)\,e^{-j\varphi(\omega_0)}\,e^{-j(\omega_0 t+\phi)}\right)$

$= \hat{x}\,R(\omega_0)\,\frac{1}{2j}\left(e^{j(\omega_0 t+\phi+\varphi(\omega_0))} - e^{-j(\omega_0 t+\phi+\varphi(\omega_0))}\right)$

v) $\mathbf{y(t) = R(\omega_0)\,\hat{x}\,\sin\left(\omega_0 t+\phi+\varphi(\omega_0)\right)}$

5. a) $y(t) = \frac{2}{3}\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(2t)$

b) $y(t) = \frac{2}{\sqrt{10}}\sin\left(3t + 4 - \arctan(3)\right)$

6. a) $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$

b) ...

c) ...

d) Mittlere Leistungen: $\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} |y(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} |x(t)|^2\,dt\right)$

$\left(\hat{y}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\right)^2$

$\left|H(\omega_{max})\right|^2 = \frac{1}{1+\left(RC\omega_{max}\right)^2} = \frac{1}{2}$

$\omega_{max} = \frac{1}{RC} = 1.0\cdot 10^4\,\frac{1}{s}$

$f_{max} = \omega_{max}/2\pi = 1.6\ \text{kHz}$