

Übung 15 **Fourier-Transformation** **Faltung**

Lernziele

- wissen, wie die Faltung zweier Funktionen definiert ist.
- wissen, dass die Faltung das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz erfüllt.
- sich das Faltungsintegral zweier Funktionen grafisch vorstellen können.
- die Faltung zweier einfacher Funktionen grafisch ausführen können.

Einleitung

Die Faltung zweier Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist wie folgt definiert:

$$x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

Die Faltung erfüllt die folgenden Rechengesetze:

Kommutativgesetz: $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

Assoziativgesetz: $(x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t) = x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t))$

Distributivgesetz: $x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

Aufgaben

1. Veranschaulichen Sie sich das Faltungsintegral

$$x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

anhand der beiden konkreten Funktionen

$$x_1(t) = e^{-at} \quad (t) \quad (a>0)$$

$$x_2(t) = \delta(t)$$

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- a) Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Funktionen:

i) $x_1(\tau)$

ii) $x_2(\tau)$

iii) $x_2(-\tau)$

iv) $x_2(t-\tau)$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $t>0$ und $t<0$.

v) $x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $t>0$ und $t<0$.

- b) Finden Sie mit Hilfe der Grafen aus a) eine geometrische Veranschaulichung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

2. (siehe Seite 2)

2. Die Funktion $y(t)$ sei definiert als Faltung der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t)$$

- i) Skizzieren Sie die Grafen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.
- ii) Bestimmen Sie $y(t)$ auf grafische Weise, d.h. nach dem in der Aufgabe 1 aufgezeigten grafischen Vorgehen.
- iii) Skizzieren Sie den Grafen von $y(t)$.

a) $x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 1) \end{cases}$

b) $x_1(t) = t$
 $x_2(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 1) \end{cases}$

c) * $x_1(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ -t+2 & (1 \leq t \leq 2) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 2) \end{cases}$
 $x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 2) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 2) \end{cases}$

3. * Beweisen Sie das Kommutativgesetz der Faltung.

Hinweis:

Führen Sie im Faltungsintegral eine geeignete Substitution durch.

4. * Im Unterricht wurde gezeigt, dass die Faltung einer Funktion $x(t)$ mit der Dirac'schen Delta-"Funktion" $\delta(t)$ die Funktion $x(t)$ selbst ergibt:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage direkt aus der Ausblendeigenschaft der Dirac'schen Delta-"Funktion" $\delta(t)$ folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

Lösungen

1. a) ...
 b) $\int x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$
 ist die Fläche zwischen dem Grafen der Funktion $x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)$ und der τ -Achse.

2. a) i) ...
 ii) $y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0 \quad t > 2) \\ t & (0 \leq t \leq 1) \\ -t+2 & (1 \leq t \leq 2) \end{cases}$

iii) ...
 b) i) ...
 ii) $y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{t^2}{2} & (0 \leq t \leq 1) \\ \frac{1}{2} & (t > 1) \end{cases}$

iii) ...
 c) * i) ...
 ii) $y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & (0 \leq t \leq 1) \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1 & (1 \leq t \leq 3) \\ \frac{t^2}{2} - 4t + 8 & (3 \leq t \leq 4) \\ 0 & (t < 0 \quad t > 4) \end{cases}$
 iii) ...

3. * $\int x_1(t) * x_2(t) dt = \int x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$ | Substitution $s := t - \tau$
 $= \int x_1(t-s) x_2(s) (-ds)$
 $= \int x_1(t-s) x_2(s) ds$
 $= \int x_2(s) x_1(t-s) ds$
 $= x_2(t) * x_1(t)$

4. * $\int x(t) (t-t_0) dt = x(t_0)$ | Umbenennung t_0

$\int x(t) (t-\tau) dt = x(\tau)$ | Umbenennung t

$\int x(\tau) (\tau-t) d\tau = x(t)$ | $(\tau-t) = (t-\tau)$

$\int x(\tau) (t-\tau) d\tau = x(t)$