Übung 13 Fourier-Transformation
Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion

Lernziele

- die Fourier-Transformierte einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln bestimmen können.
- die Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion grafisch darstellen können.

Aufgabe

Gegeben ist die periodische Funktion x(t).

i) Skizzieren Sie den Grafen von x(t) (ausser bei d)).

ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) von x(t) von Hand und/oder mit Hilfe von Integraltafeln.

iii) Skizzieren Sie das Spektrum $\{c_k\}$ grafisch als Balkendiagramm.

iv) Geben Sie die zu x(t) gehörige Fourier-Transformierte $X(\omega)$ an.

v) Skizzieren Sie den Grafen von $X(\omega)$.

a) $x(t) = \cos(\omega_0 t)$

b) $x(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t| < \frac{T_0}{4}\right) \\ 0 & \left(\frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2}\right) \end{cases}$, $x(t+T_0) = x(t)$

Bemerkung:
Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k haben Sie bereits in der Übung 8 bestimmt.

c) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$

d) $x(t) = -3 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 5\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) - 4\sin(\pi t)$

Lösungen

a) i) ...

ii) $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, alle anderen Koeffizienten = 0

iii) ...

iv) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0) = \pi\, \delta(\omega+\omega_0) + \pi\, \delta(\omega-\omega_0)$

v) ...

b) i) ...

ii) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = ...,-11,-7,-3,1,5,9,...) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = ...,-9,-5,-1,3,7,11,...) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k\neq 0) \end{cases}$

iii) ...

iv) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$

$$= ... - \frac{2}{7}\delta(\omega+7\omega_0) + \frac{2}{5}\delta(\omega+5\omega_0) - \frac{2}{3}\delta(\omega+3\omega_0) + 2\,\delta(\omega+\omega_0) + \pi\,\delta(\omega)$$
$$+ 2\,\delta(\omega-\omega_0) - \frac{2}{3}\delta(\omega-3\omega_0) + \frac{2}{5}\delta(\omega-5\omega_0) - \frac{2}{7}\delta(\omega-7\omega_0) + ...$$

v) ...

c) i) ...

ii) $c_k = \frac{1}{T}$ für alle k Z

iii) ...

iv) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\,\frac{2\pi}{T}\right)$

$$= ... + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega + \frac{6\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega + \frac{4\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\delta(\omega)$$
$$+ \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - \frac{6\pi}{T}\right) + ...$$

v) ...

d) ii) $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$c_0 = -3$, $c_2 = -j$, $c_{-2} = j$, $c_3 = 2j$, $c_{-3} = -2j$, $c_4 = c_{-4} = \frac{5}{2}$, alle anderen Koeffizienten = 0

iii) ...

iv) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$

$$= 5\pi\,\delta\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right) - 4\pi j\,\delta(\omega+\pi) + 2\pi j\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) - 6\pi\,\delta(\omega)$$
$$- 2\pi j\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + 4\pi j\,\delta(\omega-\pi) + 5\pi\,\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{3}\right)$$

v) ...