

Übung 9 Komplexe Fourier-Reihe Parseval'sche Beziehung, "Negative Frequenzen"

Lernziele

- einen neuen Sachverhalte analysieren können.
- mit Hilfe der Parseval'schen Beziehung mittlere Leistungen von einzelnen Fourier-Komponenten eines periodischen Signals bestimmen können.
- die Bedeutung der einzelnen Summanden in der komplexen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion verstehen.

Aufgaben

1. Prüfen Sie die Parseval'sche Beziehung am Beispiel des folgenden periodischen Signals $x(t)$ mit den komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) nach (vgl. Übung 8, Aufgabe 3a):

$$x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$$
$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = \pm 1) \\ -\frac{j}{2} & (k = 2) \\ \frac{j}{2} & (k = -2) \\ 0 & (k = \pm 1, \pm 2) \end{cases}$$

2. Gegeben ist das periodische Signal $x(t)$ und seine reellen bzw. komplexen Fourier-Koeffizienten.

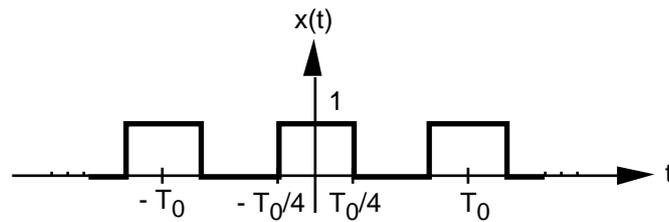
Bestimmen Sie die mittlere Leistung

- des konstanten Anteils
 - der Grundschiwingung
- im Verhältnis zur mittleren Leistung des ganzen Signals $x(t)$.

- a) $x(t)$ aus Aufgabe 1:

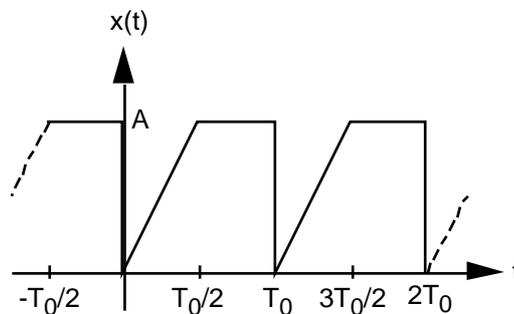
$$x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$$
$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = \pm 1) \\ -\frac{j}{2} & (k = 2) \\ \frac{j}{2} & (k = -2) \\ 0 & (k = \pm 1, \pm 2) \end{cases}$$

b) $x(t)$ aus Übung 8, Aufgabe 1a):



$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0) \\ \frac{1}{k} & (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{1}{k} & (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$$

c) $x(t)$ aus Übung 8, Aufgabe 1c):



$$c_k = \begin{cases} \frac{3A}{4} & (k=0) \\ -\frac{A}{k^2} + j \frac{A}{2k} & (k \neq 0 \text{ } k \text{ ungerade}) \\ j \frac{A}{2k} & (k \neq 0 \text{ } k \text{ gerade}) \end{cases}$$

3. Im Formelbuch *Papula* sind auf den Seiten 186 bis 188 die reellen Fourier-Reihen spezieller Signale tabelliert.

Bearbeiten Sie für die verlangten Signale die folgenden Teilaufgaben:

- i) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$).
 - ii) Stellen Sie das Spektrum $\{c_k\}$ der Funktion $x(t)$ grafisch als Balkendiagramm dar.
 - iii) Bestimmen Sie die mittlere Leistung der Grundschwingung im Verhältnis zur mittleren Leistung des ganzen Signals $x(t)$.
- a) Dreieckskurve (Nr. 4, Seite 187) für $\hat{y} := 1$
 - b) Kippschwingung (Nr. 5, Seite 187) für $\hat{y} := 1$
 - c) Sinusimpuls (Nr. 8, Seite 188) für $\hat{y} := 1$

4. Ein Studienkollege stellt Ihnen die folgende Frage:

"In der komplexen Fourier-Reihe hat es Summanden $c_1 e^{j \omega_0 t}$, $c_2 e^{j 2 \omega_0 t}$, $c_3 e^{j 3 \omega_0 t}$, etc., die zu positiven Frequenzen $\omega_0, 2 \omega_0, 3 \omega_0$, etc. gehören. Aber es hat auch Summanden $c_{-1} e^{-j \omega_0 t}$, $c_{-2} e^{-j 2 \omega_0 t}$, $c_{-3} e^{-j 3 \omega_0 t}$, welche zu negativen Frequenzen $-\omega_0, -2 \omega_0, -3 \omega_0$, etc. gehören. Ich verstehe, was eine positive Frequenz ist. Aber wie muss ich mir negative Frequenzen vorstellen?"

Geben Sie auf diese Frage eine korrekte und für Ihren Studienkollegen verständliche Antwort.

Lösungen

$$1. \quad \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{2}{1} \int_0^1 |\cos(4t) + \sin(8t)|^2 dt = 1$$

$$|c_k|^2 = |c_{-1}|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_2|^2 + |c_{-2}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

k=-

2. a) i) Das Signal $x(t)$ enthält keinen konstanten Anteil.

$$\frac{\bar{P}_0}{\bar{P}_{\text{tot}}} = \frac{|c_0|^2}{|c_k|^2} = \frac{0}{1} = 0 = 0 \%$$

k=-

$$ii) \quad \frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_{\text{tot}}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{|c_k|^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50 \%$$

k=-

b) i)
$$\frac{\bar{P}_0}{\bar{P}_{\text{tot}}} = \frac{|c_0|^2}{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.500 = 50.0 \%$$

ii)
$$\frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_{\text{tot}}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt} = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{2} = 0.405 = 40.5 \%$$

c) i)
$$\frac{\bar{P}_0}{\bar{P}_{\text{tot}}} = \frac{|c_0|^2}{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt} = \frac{\frac{9A^2}{16}}{\frac{2A^2}{3}} = \frac{27}{32} = 0.844 = 84.4 \%$$

ii)
$$\frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_{\text{tot}}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt} = \frac{\frac{A^2(4+2)}{2 \cdot 4}}{\frac{2A^2}{3}} = \frac{3(4+2)}{4 \cdot 4} = 0.107 = 10.7 \%$$

3. a) i)
$$c_k = \begin{cases} 0 & (k \text{ gerade}) \\ -j \frac{4}{k^2 \cdot 2} & (k = \pm 1, \pm 5, \pm 9, \dots) \\ j \frac{4}{k^2 \cdot 2} & (k = \pm 3, \pm 7, \pm 11, \dots) \end{cases}$$

ii) ...

iii)
$$\frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_{\text{tot}}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt} = \frac{\frac{32}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{96}{4} = 0.986 = 98.6 \%$$

b) (siehe Seite 4)

b) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0) \\ j \frac{1}{2k} & (k \neq 0) \end{cases}$

ii) ...

iii) $\frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_{\text{tot}}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0.076 = 7.6 \%$

c) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0) \\ -j \frac{1}{4} & (k = 1) \\ j \frac{1}{4} & (k = -1) \\ 0 & (k \text{ ungerade } k \neq \pm 1) \\ -\frac{1}{(k^2-1)} & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$

ii) ...

iii) $\frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_{\text{tot}}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50 \%$

4. ...