Übung 8 Komplexe Fourier-Reihe
Komplexe Fourier-Koeffizienten, Reelle-Komplexe Fourier-Reihe

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion in die komplexe Fourier-Reihe umformen können und umgekehrt.
- die komplexen Fourier-Reihe einer Funktion, die aus einer Linearkombination trigonometrischer Funktionen besteht, direkt bestimmen können.
- das Spektrum einer periodischen Funktion als Balkendiagramm grafisch darstellen können.
- die Bedeutung der einzelnen Summanden der Fourier-Reihe verstehen.
- beurteilen können, wie sich die komplexen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion verändern, wenn man die Funktion skaliert.

Aufgaben

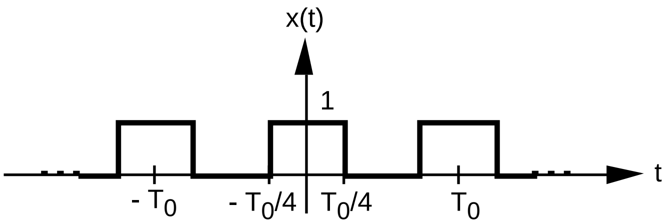
1. Gegeben ist die periodische Funktion x(t) und ihre reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k $(k \in N)$ und b_k $(k \in N)$.

   i) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k $(k \in Z)$ aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k $(k \in N)$ und b_k $(k \in N)$.

   ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k $(k \in Z)$ direkt aus der Funktion x(t).

   iii) Schreiben Sie ein paar Glieder der komplexen Fourier-Reihe auf.

   a) x(t) aus Übung 4, Aufgabe 2:



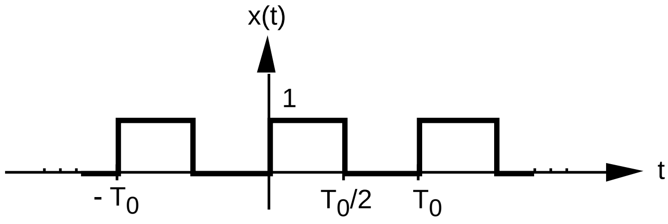
$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k = 1,5,9,...) \\ -\frac{2}{k\pi} & (k = 3,7,11,...) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

   b) (siehe Steite 2)

b)

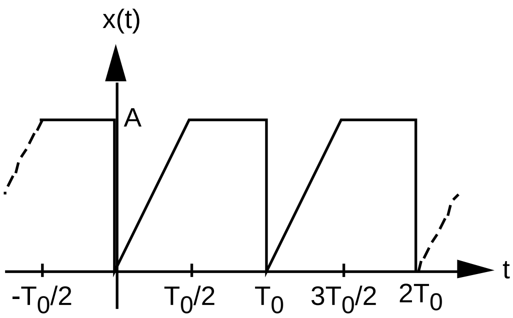


$a_0 = \frac{1}{2}$

$a_k = 0$

$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & \text{(k ungerade)} \\ 0 & \text{(k gerade)} \end{cases}$

c) x(t) aus Übung 4, Aufgabe 3:



$a_0 = \frac{3A}{4}$

$a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2\pi^2} & \text{(k ungerade)} \\ 0 & \text{(k gerade)} \end{cases}$

$b_k = -\frac{A}{k\pi}$

2. Zeigen Sie, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) einer periodischen, **reellen** Funktion x(t) die folgenden Symmetrie-Eigenschaften besitzen:

a) x(t) gerade c_k R

b) x(t) ungerade c_k rein imaginär

c) * $\left(|c_k| \text{ gerade in k}\right) \quad \left(\arg(c_k) \text{ ungerade in k}\right)$

Hinweise:
- Gehen Sie bei a) und b) von der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) aus (siehe Theorie-Blätter "Komplexe Fourier-Reihe").
  Berücksichtigen Sie die Eigenschaften der reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N) und b_k (k N) einer geraden bzw. ungeraden Funktion.
- Benützen Sie bei c) die im Unterricht hergeleitete Symmetrie-Eigenschaft $c_{-k} = \left(c_k\right)^*$

3. (siehe Seite 3)

3. Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der nachstehenden Funktionen x(t).
Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- Bestimmen Sie T_0 und ω_0.
- Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_k (k   Z).
- Stellen Sie das Spektrum $\{c_k\}$ der Funktion x(t) grafisch als Balkendiagramm dar.

a) $x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$

b) $x(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$

c) $x(t) = \cos(4t) + \sin(\pi t)$

d) $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)$

4. Eine periodische Funktion x(t) mit der Grundperiode T_0 und der Grundfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T_0$ kann in eine reelle Fourier-Reihe oder in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt werden:

Reelle Fourier-Reihe:

(1) $$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)\right)$$ (a_0, a_k, b_k R)

Komplexe Fourier-Reihe:

(2) $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$ (c_k C)

a) Drücken Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k   Z) durch die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k   N), b_k (k   N) aus und umgekehrt, d.h. formulieren Sie die beiden Zusammenhänge

(1) → (2) : a_0, a_k (k   N), b_k (k   N) → c_k (k   Z)
(2) → (1) : c_k (k   Z) → a_0, a_k (k   N), b_k (k   N)

Hinweis:
- Der Zusammenhang (1) → (2) entspricht der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k   Z).
- Der Zusammenhang (2) → (1) ergibt sich durch Umformung des Zusammenhanges (1) → (2).

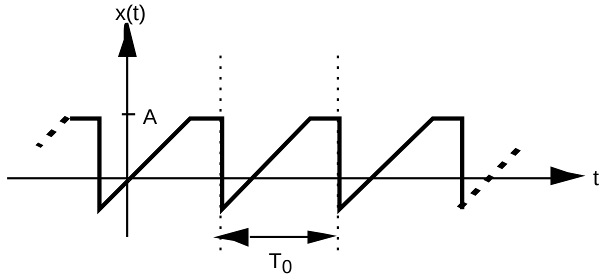
b) Vergleichen Sie die beiden Formen (1) und (2) der Fourier-Reihe wie folgt:
Geben Sie an, welche Summanden sich in den Fourier-Reihen entsprechen, d.h. welche Summanden jeweils
- den konstanten Anteil
- die Grundschwingung bzw. die 1. Harmonische
- die 2. Harmonische
- die 3. Harmonische
- die 7. Harmonische
- die n. Harmonische

in der Fourier-Analyse der Funktion x(t) beschreiben.

5. (siehe Seite 4)

5. Wie in der Aufgabe 4 der Übung 7 sollen Sie in dieser Aufgabe beurteilen, wie sich eine Skalierung bzw. eine Zeitverschiebung einer periodischen Funktion x(t) auf deren Fourier-Koeffizienten auswirkt.

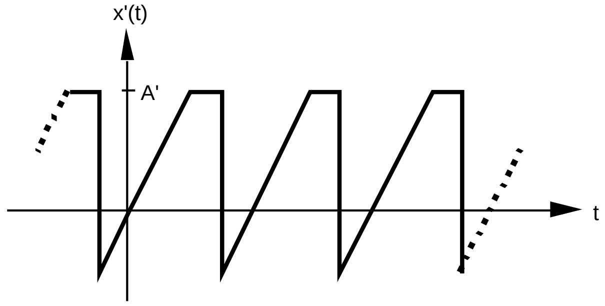
Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion x(t):



Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in Z$) von x(t) seien bekannt.

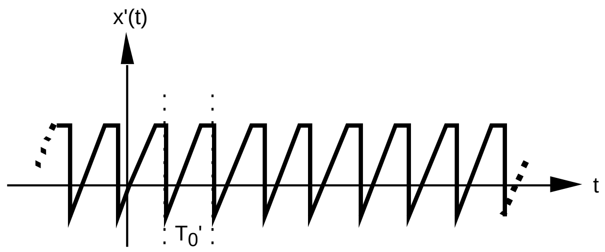
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, inwiefern sich die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k' ($k \in Z$) von x'(t) von den Koeffizienten c_k ($k \in Z$) von x(t) unterscheiden.

a)



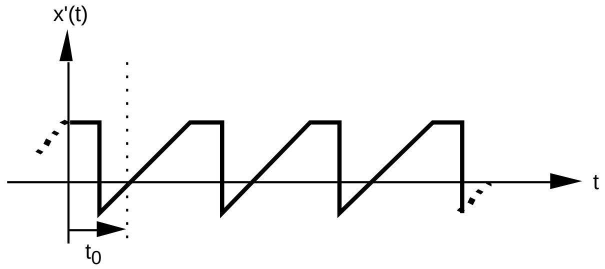
x'(t) ist gegenüber x(t) um den Faktor $r := \frac{A'}{A}$ skaliert, d.h. $x'(t) = r \cdot x(t)$

b)



x'(t) ist gegenüber x(t) zeitlich um den Faktor r skaliert bzw. "gestaucht", d.h. $T_0' = \frac{1}{r} T_0$

c)



x'(t) ist gegenüber x(t) um t_0 zeitverschoben, d.h. $x'(t) = x(t-t_0)$

Lösungen

1. a) i)

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = ...,-11,-7,-3,1,5,9,...) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = ...,-9,-5,-1,3,7,11,...) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

ii) siehe i)

iii) $$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{\pi} e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} e^{-j3\omega_0 t} + \frac{1}{5\pi} e^{j5\omega_0 t} + \frac{1}{5\pi} e^{-j5\omega_0 t} + ...$$

b) i)

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ -j\frac{1}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

ii) siehe i)

iii) $$x(t) = \frac{1}{2} - j\frac{1}{\pi} e^{j\omega_0 t} + j\frac{1}{\pi} e^{-j\omega_0 t} - j\frac{1}{3\pi} e^{j3\omega_0 t} + j\frac{1}{3\pi} e^{-j3\omega_0 t} - j\frac{1}{5\pi} e^{j5\omega_0 t} + j\frac{1}{5\pi} e^{-j5\omega_0 t} - ...$$

c)

$$c_k = \begin{cases} \frac{3A}{4} & (k=0) \\ -\frac{A}{k^2\pi^2} + j\frac{A}{2k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ j\frac{A}{2k\pi} & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

ii) siehe i)

iii) $$x(t) = \frac{3A}{4} + \left(-\frac{A}{\pi^2} + j\frac{A}{2\pi}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(-\frac{A}{\pi^2} - j\frac{A}{2\pi}\right) e^{-j\omega_0 t} + j\frac{A}{4\pi} e^{j2\omega_0 t} - j\frac{A}{4\pi} e^{-j2\omega_0 t}$$
$$+ \left(-\frac{A}{9\pi^2} + j\frac{A}{6\pi}\right) e^{j3\omega_0 t} + \left(-\frac{A}{9\pi^2} - j\frac{A}{6\pi}\right) e^{-j3\omega_0 t} + j\frac{A}{8\pi} e^{j4\omega_0 t} - j\frac{A}{8\pi} e^{-j4\omega_0 t} + ...$$

2.

$$c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & (k>0) \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & (k<0) \end{cases}$$

a) x(t) gerade $\quad b_k = 0 \; (k \in \mathbb{Z})$

$$c_k = \left.\begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2} a_k & (k>0) \\ \frac{1}{2} a_{-k} & (k<0) \end{cases}\right\} \in \mathbb{R}$$

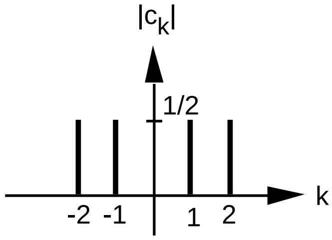
b) x(t) ungerade $\quad a_0 = 0 \quad a_k = 0 \; (k \in \mathbb{Z})$

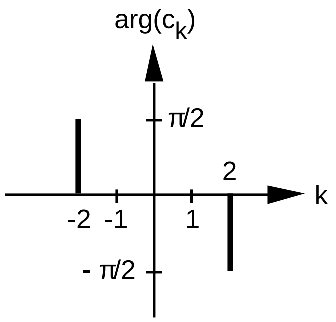
$$c_k = \left.\begin{cases} 0 & (k=0) \\ -j\frac{1}{2} b_k & (k>0) \\ j\frac{1}{2} b_{-k} & (k<0) \end{cases}\right\} \text{rein imaginär}$$

c) * ...

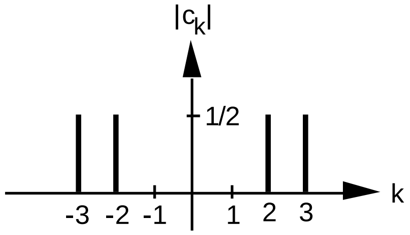
3. (siehe Seite 6)

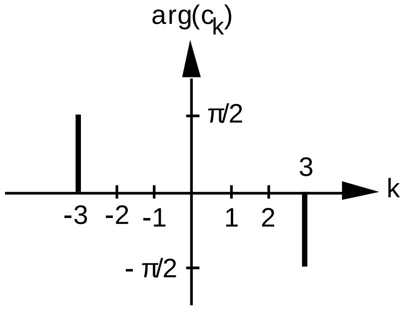
3. a) $T_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_0 = 4$ $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{j}{2}$, $c_{-2} = (c_2)^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ $(k \neq \pm 1, \pm 2)$





b) $T_0 = \pi$, $\omega_0 = 2$ $c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{j}{2}$, $c_{-3} = (c_3)^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ $(k \neq \pm 2, \pm 3)$

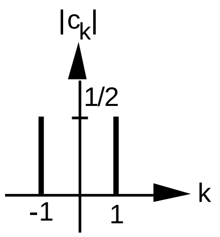


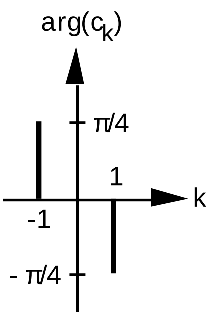


c) x(t) ist nicht periodisch und besitzt daher keine Fourier-Reihe.

d) $T_0 = 8$, $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$c_1 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}$, $c_{-1} = (c_1)^* = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}$, $c_k = 0$ $(k \neq \pm 1)$





4. a) (1) → (2) : a_0, a_k (k N), b_k (k N) → c_k (k Z)

$$c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & (k>0) \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & (k<0) \end{cases}$$

(2) → (1) c_k (k Z) → a_0, a_k (k N), b_k (k N)

$$a_0 = c_0$$
$$a_k = c_k + c_{-k}$$
$$b_k = j(c_k - c_{-k})$$

b) (siehe Seite 7)

b)

	(1)	(2)
konstanter Anteil	a_0	c_0
Grundschwingung	$a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$	$c_1 \cdot e^{j\omega_0 t} + c_{-1} \cdot e^{-j\omega_0 t}$
2. Harmonische	$a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t)$	$c_2 \cdot e^{j2\omega_0 t} + c_{-2} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$
3. Harmonische	$a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3\omega_0 t)$	$c_3 \cdot e^{j3\omega_0 t} + c_{-3} \cdot e^{-j3\omega_0 t}$
7. Harmonische	$a_7 \cdot \cos(7\omega_0 t) + b_7 \cdot \sin(7\omega_0 t)$	$c_7 \cdot e^{j7\omega_0 t} + c_{-4} \cdot e^{-j7\omega_0 t}$
n. Harmonische	$a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$	$c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$

5. a) Die Koeffizienten vergrössern sich um den Faktor r.
$c_k' = r \cdot c_k$ (k Z)

b) Die Koeffizienten bleiben unverändert.
$c_k' = c_k$ (k Z)

c) Eine Zeitverschiebung um t_0 hat für jeden Summanden in der komplexen Fourier-Reihe die folgende Auswirkung:

$c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$ (k Z)
↓
$c_k \cdot e^{jk\omega_0 (t-t_0)}$
$= c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}$
$= \left(c_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}\right) \cdot e^{jk\omega_0 t}$

Es folgt also:
$c_k' = c_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}$ (k Z)

Der Betrag von c_k bleibt gleich, nur das Argument ändert:
$|c_k'| = |c_k|$ (k Z)
$\arg(c_k') = \arg(c_k) - k\omega_0 t$ (k Z)