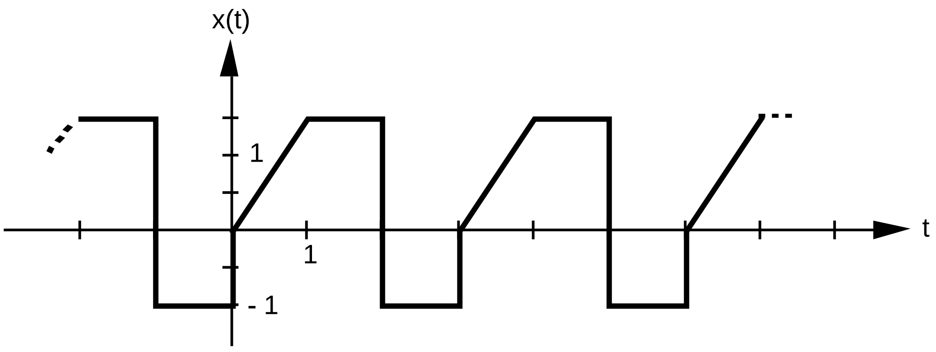
Übung 7 Reelle Fourier-Reihe
Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten

Lernziele

- aus dem Grafen einer einfacheren periodischen Funktion den konstanten Anteil der reellen Fourier-Reihe herauslesen können.
- angeben können, wie sich der konstante Anteil der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion ändert, wenn der Graf der Funktion vertikal verschoben wird.
- ohne Berechnung von Integralen Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion mit speziellen Symmetrieeigenschaften machen können.
- ohne Berechnung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion bestimmen können, die sich aus trigonometrischen Teilfunktionen zusammensetzt.
- beurteilen können, wie sich die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion verändern, wenn man die Funktion skaliert.

Aufgaben

1. Gegeben ist die periodische Funktion x(t):



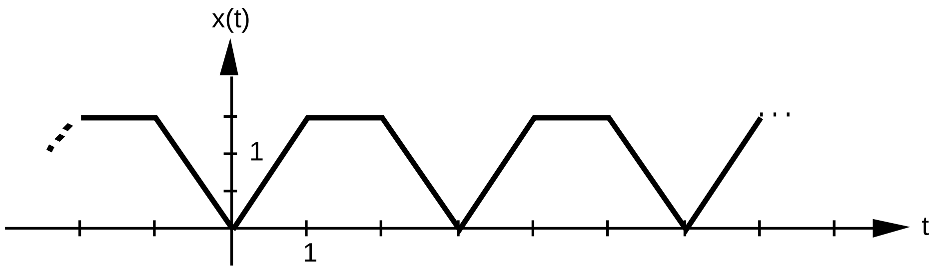
a) Bestimmen Sie den reellen Fourier-Koeffizienten a_0.

b) Der Graf von x(t) werde um 3 Einheiten vertikal nach oben verschoben.
Wie gross ist der Koeffizient a_0 der geschobenen Funktion?

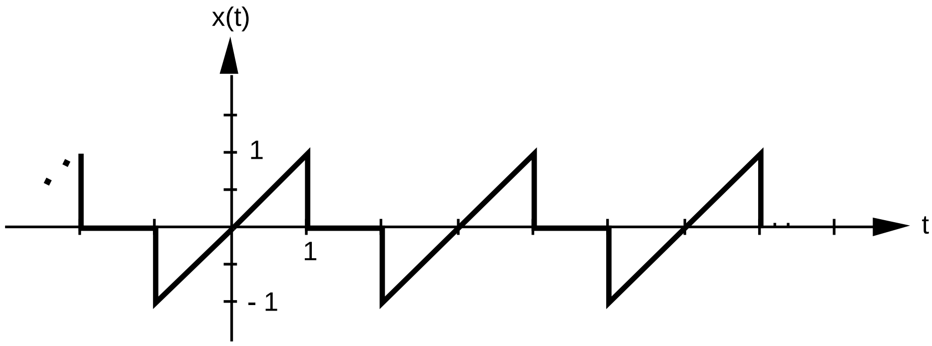
c) Um wieviele Einheiten müsste man den Grafen von x(t) vertikal verschieben, damit der Koeffizient a_0 der geschobenen Funktion gleich Null wird?

2. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, welche Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N) der periodischen Funktion x(t) möglich sind, ohne dass man Berechnungen ausführt oder in einem Formelbuch nachschaut.

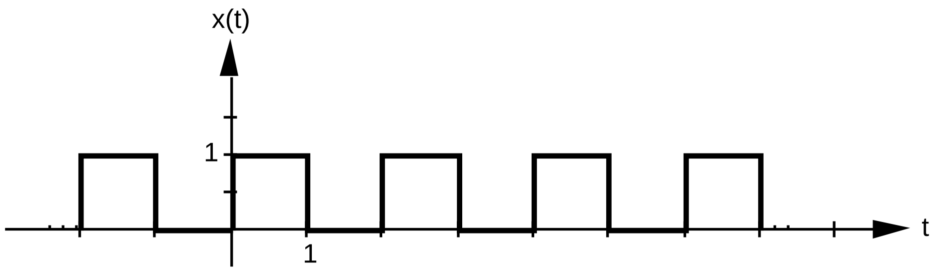
a)



b)



c)



3. Bestimmen Sie ohne Tabellen und Berechnung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N) der Funktion x(t):

a) $x(t) = 2 + \cos(3t) - 4\cos(6t) + 2\sin(15t)$

b) $x(t) = \sin(4t) + 3\cos(10t) - 2\sin(12t) + \sin(24t)$

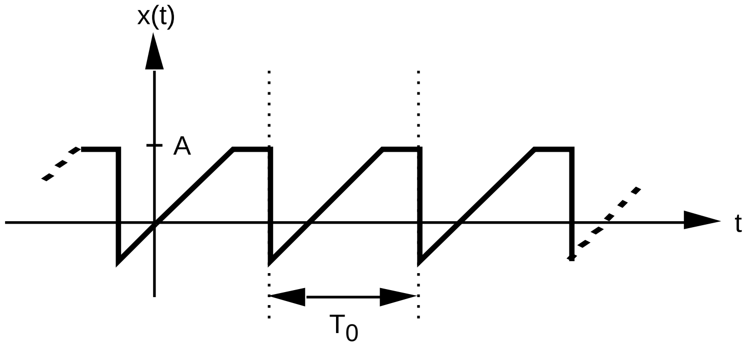
c) $x(t) = -3 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 5\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) - 4\sin(\pi t)$

d) $x(t) = -3 + 2\sin\left(\frac{2}{3}t\right) + 5\cos\left(\frac{4}{3}t\right) - 4\sin(\pi t)$

e) $x(t) = 2\sin(4t-1) - 4\cos(3t+2)$

4. (siehe Blatt 3)

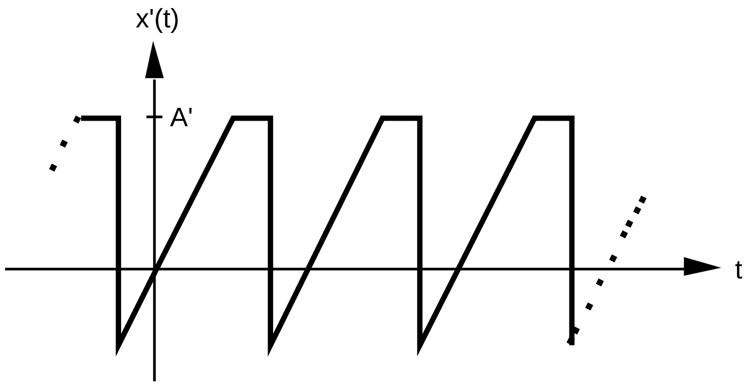
4. Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion $x(t)$:



Die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k   N), b_k (k   N) von $x(t)$ seien bekannt.

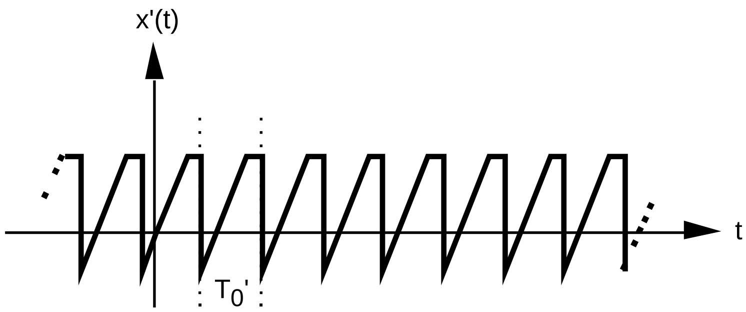
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, inwiefern sich die reellen Fourier-Koeffizienten a_0', a_k' (k   N), b_k' (k   N) von $x'(t)$ von den Koeffizienten a_0, a_k (k   N), b_k (k   N) von $x(t)$ unterscheiden.

a)



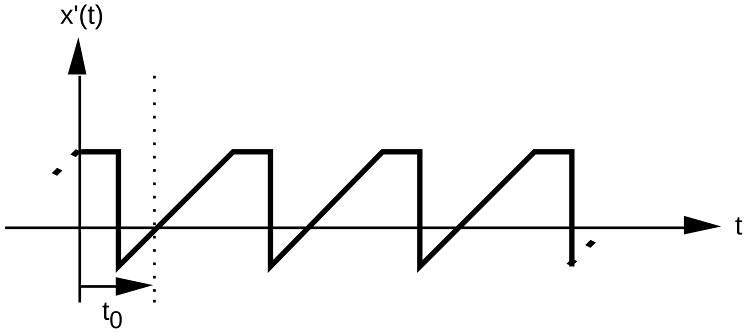
$x'(t)$ ist gegenüber $x(t)$ um den Faktor $r := \frac{A'}{A}$ skaliert, d.h. $x'(t) = r \cdot x(t)$

b)



$x'(t)$ ist gegenüber $x(t)$ zeitlich um den Faktor r skaliert bzw. "gestaucht", d.h. $T_0' = \frac{1}{r} T_0$

c) *



$x'(t)$ ist gegenüber $x(t)$ um t_0 zeitverschoben, d.h. $x'(t) = x(t-t_0)$

Lösungen

1. a) $\frac{5}{12}$

   b) $\frac{41}{12}$

   c) $-\frac{5}{12}$

2. a) $a_0 > 0,\ b_k = 0\ (k \in \mathbb{N})$

   b) $a_0 = 0,\ a_k = 0\ (k \in \mathbb{N})$

   c) $a_0 = \frac{1}{2},\ a_k = 0\ (k \in \mathbb{N})$

3. a) $\omega_0 = 3 \qquad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k3t) + b_k \cdot \sin(k3t)\right)$

   $a_0 = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = -4,\ b_5 = 2$, alle anderen Koeffizienten = 0

   b) $\omega_0 = 2 \qquad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k2t) + b_k \cdot \sin(k2t)\right)$

   $a_0 = 0,\ b_2 = 1,\ a_5 = 3,\ b_6 = -2,\ b_{12} = 1$, alle anderen Koeffizienten = 0

   c) $\omega_0 = \frac{\pi}{3} \qquad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{3} t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{3} t\right)\right)$

   $a_0 = -3,\ b_2 = 2,\ b_3 = -4,\ a_4 = 5$, alle anderen Koeffizienten = 0

   d) $x(t)$ ist nicht periodisch und besitzt daher keine reelle Fourier-Reihe.

   e) $a_0 = 0,\ a_3 = -4\cos(2),\ a_4 = -2\sin(1),\ b_3 = 4\sin(2),\ b_4 = 2\cos(1)$,
   alle anderen Koeffizienten = 0

4. a) Die Koeffizienten vergrössern sich um den Faktor r
   $a_0' = r \cdot a_0,\ a_k' = r \cdot a_k\ (k \in \mathbb{N}),\ b_k' = r \cdot b_k\ (k \in \mathbb{N})$

   b) Die Koeffizienten bleiben unverändert
   $a_0' = a_0,\ a_k' = a_k\ (k \in \mathbb{N}),\ b_k' = b_k\ (k \in \mathbb{N})$

   c) * $a_0' = a_0$

   k-te Harmonische

   $a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$

   $\downarrow$

   $$a_k \cdot \cos\left(k\omega_0(t-t_0)\right) + b_k \cdot \sin\left(k\omega_0(t-t_0)\right)$$

   $$= a_k\left(\cos(k\omega_0 t)\cdot\cos(k\omega_0 t_0) + \sin(k\omega_0 t)\cdot\sin(k\omega_0 t_0)\right)$$

   $$+ b_k\left(\sin(k\omega_0 t)\cdot\cos(k\omega_0 t_0) - \cos(k\omega_0 t)\cdot\sin(k\omega_0 t_0)\right)$$

   $= \ldots$

   $$= \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t_0) - b_k \cdot \sin(k\omega_0 t_0)\right) \cos(k\omega_0 t) + \left(a_k \cdot \sin(k\omega_0 t_0) + b_k \cdot \cos(k\omega_0 t_0)\right) \sin(k\omega_0 t)$$

   Es folgt also:

   $a_k' = a_k \cdot \cos(k\omega_0 t_0) - b_k \cdot \sin(k\omega_0 t_0)$

   $b_k' = a_k \cdot \sin(k\omega_0 t_0) + b_k \cdot \cos(k\omega_0 t_0)$