

Übung 3 **Fourier-Reihen** **Trigonometrische Basisfunktionen, Analogie Signal-Vektor, Integrale**

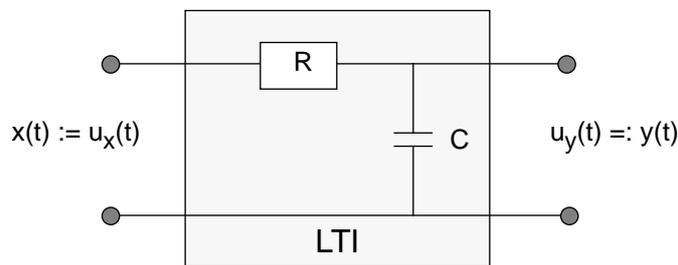
Lernziele

- verstehen, dass es sinnvoll sein kann, eine Funktion als Linearkombination von geeigneten Basisfunktionen darzustellen.
- verstehen, dass es sinnvoll ist, ein periodisches Signal, welches durch ein LTI-System läuft, als Linearkombination von sinusförmigen Teilsignalen darzustellen.
- einfachere Integrale von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln lösen können.

Aufgaben

1. **Trigonometrische Basisfunktionen**

Im Unterrichtszimmer ist die folgende RC-Schaltung aufgebaut ($R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$):



Die Schaltung bildet ein lineares, zeitinvariantes System (LTI-System).

Die an der Schaltung angelegte Spannung $u_x(t)$ entspricht dem Eingangssignal $x(t)$.

Die Spannung $u_y(t)$ über dem Kondensator entspricht dem Ausgangssignal $y(t)$.

Ein Funktions-Generator liefert das Eingangssignal $x(t)$. Der zeitliche Verlauf des Eingangssignals $x(t)$ und des Ausgangssignals $y(t)$ können auf einem Kathodenstrahl-Oszillografen (KO) betrachtet werden.

Die Werte von R und C sind gegeben durch $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 100 \text{ nF}$.

- Stellen Sie am Funktions-Generator ein **sinusförmiges** Signal mit der Amplitude 0.5 V (1 V peak-to-peak) und der Frequenz 1 kHz ein.
Stellen Sie am KO fest:
 - Das Ausgangssignal ist ebenfalls ein **sinusförmiges** Signal
 - Die **Frequenz** ist gleich wie beim Eingangssignal. Lediglich **Amplitude** und **Phase** haben sich verändert.
- Variieren Sie am Funktions-Generator die Frequenz des Eingangssignals.
Stellen Sie am KO fest:
 - Das Ausgangssignal hat immer die gleiche Frequenz wie das Eingangssignal.
 - Die Amplitude und die Phase des Ausgangssignals hängen von der Frequenz ab.Begründen sie, dass es sich beim betrachteten System um ein Tiefpassfilter handelt.
- Stellen Sie nun am Funktions-Generator ein **Dreieckssignal** ein.
Stellen Sie am KO fest:
 - Das Ausgangssignal ist **kein Dreieckssignal** mehr.

2. **Analogie Signal Vektor**

In dieser Aufgabe soll die folgende Analogie aufgezeigt werden:

Ein Signal $x(t)$ durchläuft ein lineares System.

Ein Vektor x wird einer linearen Abbildung (hier: Drehung) unterzogen.

Gegeben ist der folgende Vektor x im dreidimensionalen Raum:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Vektor x wird um 90° um die z -Achse gedreht.

Gesucht ist der zu x gehörige Bildvektor y .

- Finden Sie eine Methode, um den Bildvektor y möglichst einfach zu bestimmen. Die Methode soll eine Zerlegung von x in möglichst günstige Teilvektoren beinhalten. Beschreiben Sie das Vorgehen in ein paar Stichworten.
- Erklären Sie, worin die in der Einleitung dieser Aufgabe erwähnte Analogie besteht.

3. Integrale

In der Herleitung der Formeln zur Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten von periodischen Funktionen treten die nachstehenden Integrale auf.

Bestimmen Sie die Integrale von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln.

Es gilt jeweils $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig, $m \in \mathbb{N}$ beliebig

a) $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) dt$

b) $\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) dt$

c) $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \sin(m \omega_0 t) dt$

d) $\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt$

e) $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt$

Lösungen

1. ...

2. a) - x darstellen als Linearkombination der Basisvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 e_1 + 4 e_2 + 5 e_3$$

- Drehung auf die einzelnen Basisvektoren anwenden:

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \\ e_3 & e_3 \end{pmatrix}$$

- Bildvektor als Linearkombination der Bildvektoren der Basisvektoren zusammensetzen:

$$y = 2 e_2 + 4 (-e_1) + 5 e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Analogie in tabellarischer Darstellung:

Signal $x(t)$	Vektor x
Das Signal $x(t)$ durchläuft ein lineares System.	Der Vektor x wird einer linearen Abbildung unterworfen.
Basis-signale $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ...	Basisvektoren e_1 , e_2 , e_3
Das Signal $x(t)$ wird dargestellt als Linearkombination der Basissignale $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ...	Der Vektor wird dargestellt als Linearkombination der Basisvektoren e_1 , e_2 , e_3
Die Basissignale $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ... verhalten sich bezüglich des betrachteten Systems sehr einfach.	Die Basisvektoren e_1 , e_2 , e_3 verhalten sich gegenüber der betrachteten Abbildung sehr einfach.
Das Ausgangssignal $y(t)$ setzt sich zusammen als Linearkombination der Ausgangssignale der einzelnen Basissignale.	Der Bildvektor y setzt sich zusammen als Linearkombination der Bildvektoren der einzelnen Basisvektoren.

3. a) $\int_0^{T_0} \sin(k \omega t) dt = 0$

b) $\int_0^{T_0} \cos(k \omega t) dt = 0$

c) $\int_0^{T_0} \sin(k \omega t) \cdot \sin(m \omega t) dt = \frac{0}{2} \quad (k \neq m)$

d) $\int_0^{T_0} \cos(k \omega t) \cdot \cos(m \omega t) dt = \frac{T_0}{2} \quad (k=m)$

e) $\int_0^{T_0} \sin(k \omega t) \cdot \cos(m \omega t) dt = 0$