Übung 2 — Funktionen
Periodizität, Symmetrie

Lernziele

- neue Sachverhalte analysieren können.
- beurteilen können, ob eine Funktion periodisch ist oder nicht.
- die Grundperiode einer Funktion bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine Funktion gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade ist.
- den geraden bzw. den ungeraden Anteil einer Funktion bestimmen können.

Aufgaben

Periodizität

Bei den Aufgaben 1 bis 4 können Sie von der folgenden, nicht mehr zu beweisenden Tatsache ausgehen:
$x(t) = \sin(t)$ bzw. $\cos(t)$ Grundperiode $T_0 = 2\pi$

1. Gegeben sind die beiden Funktionen $x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$ und $x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$.

   a) Geben Sie die Grundperiode T_0 der Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ an.
   b) Geben Sie alle Perioden T der Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ an.

2. Gegeben sind die beiden Funktionen $x_1(t) = \sin(k\omega_0 t)$ und $x_2(t) = \cos(k\omega_0 t)$ mit k Z.

   a) Geben Sie die Grundperiode T_0 der beiden Funktionen an.
   b) Zeigen Sie, dass $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ eine Periode der beiden Funktionen ist.

3. Beurteilen Sie, ob die gegebenen Funktionen periodisch sind oder nicht.
   Geben Sie für die periodischen Funktionen die Grundperiode T_0 an.
   Sie müssen keine strengen Beweise führen. Es genügt z.B., wenn Sie den Grafen der Funktion skizzieren und daraus die Grundperiode herauslesen.

   a) $x(t) = |\cos(t)|$ b) $x(t) = \sin(|t|)$
   c) $x(t) = \cos(|t|)$ d) $x(t) = \cos^2(2t)$
   e) $x(t) = \cos(t^2)$ f) $x(t) = e^{jt}$
   g) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ h) $x(t) = e^{jk\omega_0 t}$
   i) $x(t) = \sin(t)\cdot\cos(t)$ j) $x(t) = \sin(t) + \cos(t)$
   k) $x(t) = \sin(3t) + \sin\left(\frac{5}{2}t\right)$ l) $x(t) = \cos(2t) + \cos(\pi t)$

4. Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Funktionen, und bestimmen Sie deren Grundperiode T_0:

   a) $x(t) = \begin{cases} t^2 & (-\pi \le t < 0) \\ 0 & (0 \le t < \pi) \end{cases}$, $x(t+2\pi) = x(t)$

   b) $x(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t & \left(0 \le t < \frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{2}{\pi}t + 2 & \left(\frac{\pi}{2} \le t < \frac{3\pi}{2}\right) \\ \frac{2}{\pi}t - 4 & \left(\frac{3\pi}{2} \le t < 2\pi\right) \end{cases}$, $x(t+2\pi) = x(t)$

Symmetrie

5. Überlegen Sie sich die Richtigkeit der folgenden Aussagen (siehe Bemerkungen 1 und 2 auf dem Theorieblatt "Symmetrie") durch anschauliche Argumente, d.h. ohne strenge Beweise:

a) $x: t \rightarrow x(t)$ gerade $\int_{-a}^{a} x(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} x(t)\,dt$

b) $x: t \rightarrow x(t)$ ungerade $\int_{-a}^{a} x(t)\,dt = 0$

6. Überlegen Sie sich die Richtigkeit der Bemerkung 3 auf dem Theorieblatt "Symmetrie".

Vorgehen:

- Betrachten Sie das Produkt zweier Funktionen $x(t) := x_1(t)\cdot x_2(t)$.
- Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen wahr sind:
  - i) x_1 gerade x_2 gerade x gerade, d.h. $x(-t) \equiv x(t)$
  - ii) x_1 ungerade x_2 ungerade x gerade, d.h. $x(-t) \equiv x(t)$
  - iii) x_1 gerade x_2 ungerade x ungerade, d.h. $x(-t) \equiv -x(t)$

7. Beurteilen Sie, ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade sind. Schreiben Sie diejenigen Funktionen, die weder gerade noch ungerade sind, als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion.

a) $y(x) = x^n$ (n N)
b) $x(t) = \sin(t)$
c) $x(t) = \cos(t)$
d) $x(t) = \sin(2t)$
e) $f(x) = |\sin(2x)|$
f) $y(x) = x\cdot\sin(x^2)$
g) $f(x) = x^2\cdot\sin(|x|)$
h) $y(t) = e^t$
i) $f(x) = e^{-x^2}$
j) $x(t) = e^{jt}$
k) $f(x) = x\cdot e^{-x^2}$
l) $x(t) = \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$
m) $y(t) = 2t^2+3t+4$
n) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$

Lösungen

1. a) $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ b) $T = k \cdot T_0 = k \cdot \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $(k \in \mathbb{Z})$

2. a) $T_0 = \dfrac{2\pi}{k\omega_0}$
   b) $T = k \cdot T_0$, d.h. T ist ein ganzzahliges Vielfaches der Grundperiode T_0.

3. a) $T_0 = \pi$ b) nicht periodisch
   c) $T_0 = 2\pi$ d) $T_0 = \dfrac{\pi}{2}$
   e) nicht periodisch f) $T_0 = 2\pi$
   g) $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ h) $T_0 = \dfrac{2\pi}{k\omega_0}$
   i) $T_0 = \pi$ j) $T_0 = 2\pi$
   k) $T_0 = 4\pi$ l) nicht periodisch

4. a) $T_0 = 2\pi$ b) $T_0 = 2\pi$

5. a) ... b) ...

6. i)
$$\begin{aligned} x(-t) &= x_1(-t) \cdot x_2(-t) \\ &= x_1(t) \cdot x_2(-t) && \left(\text{da } x_1 \text{ gerade ist} \Rightarrow x_1(-t) = x_1(t)\right) \\ &= x_1(t) \cdot x_2(t) && \left(\text{da } x_2 \text{ gerade ist} \Rightarrow x_2(-t) = x_2(t)\right) \\ &= x(t) \end{aligned}$$
   ii) ...
   iii) ...

7. a) gerade, falls n gerade; ungerade, falls n ungerade
   b) ungerade c) gerade
   d) ungerade e) gerade
   f) ungerade g) gerade
   h) weder gerade noch ungerade
   $y(t) = y_g(t) + y_u(t)$ $y_g(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) = \cosh(t)$
   $y_u(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) = \sinh(t)$
   i) gerade
   j) weder gerade noch ungerade
   $x(t) = x_g(t) + x_u(t)$ $x_g(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) = \cos(t)$
   $x_u(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right) = \sin(t)$
   k) ungerade
   l) weder gerade noch ungerade
   $x(t) = x_g(t) + x_u(t)$ $x_g(t) = \dfrac{1}{2}\left(\sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
   $x_u(t) = \dfrac{1}{2}\left(\sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
   m) weder gerade noch ungerade
   $y(t) = y_g(t) + y_u(t)$ $y_g(t) = 2t^2 + 4$
   $y_u(t) = 3t$
   n) weder gerade noch ungerade
   $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ $f_g(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$
   $f_u(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$