Übung 1 Komplexe Zahlen
Komplexe Zahlen, Komplexe Exponentialfunktion

Lernziele

- bekannte und unbekannte Sachverhalte rund um die komplexen Zahlen analysieren und beurteilen können.
- eine komplexe Zahl von der einen Darstellungsform in eine andere umwandeln können.
- den Realteil, Imaginärteil, Betrag, das Argument einer komplexen Zahl bestimmen können.
- die Grundoperationen sowie das Potenzieren in der Menge der komplexen Zahlen korrekt ausführen können.
- eine komplexe Zahl komplex konjugieren können.
- Grundoperationen bei einer komplexen Exponentialfunktion korrekt ausführen können.

Aufgaben

Komplexe Zahlen

1. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.
Es ist möglich, dass in einer Teilaufgabe keine oder mehrere Aussagen richtig sind:
   a) Der Realteil einer komplexen Zahl
      ☐ ist reell. ☐ ist imaginär.
      ☐ kann negativ sein. ☐ ist nie gleich Null.
   b) Der Imaginärteil einer komplexen Zahl
      ☐ ist imaginär. ☐ ist reell.
      ☐ kann negativ sein. ☐ ist ein reelles Vielfaches von j.
   c) Der Betrag einer komplexen Zahl
      ☐ ist reell. ☐ hat einen Imaginärteil ungleich Null.
      ☐ ist grösser oder gleich Null. ☐ ist eindeutig bestimmt.
   d) Das Argument einer komplexen Zahl
      ☐ ist reell. ☐ hat einen Imaginärteil ungleich Null.
      ☐ ist grösser oder gleich Null. ☐ ist eindeutig bestimmt.
   e) Der Imaginärteil einer reellen Zahl
      ☐ ist gleich Null. ☐ existiert nicht.
   f) Der Betrag einer reellen Zahl
      ☐ ist die reelle Zahl selber. ☐ ist grösser oder gleich Null.
   g) Der Imaginärteil einer imaginären Zahl
      ☐ ist die imaginäre Zahl selber. ☐ ist die imaginäre Zahl geteilt durch j.
   h) Der Betrag einer imaginären Zahl
      ☐ ist gleich Null. ☐ existiert nicht.

2. Gegeben ist die komplexe Zahl
$$z = x + jy = r \cdot e^{j\phi}$$
Geben Sie die folgenden Zusammenhänge an:
   a) $(x,y) \rightarrow r$
   Gesucht ist eine Formel, mit welcher r aus x und y berechnet werden kann.
   b) $(x,y) \rightarrow \phi$ c) $(r,\phi) \rightarrow x$ d) $(r,\phi) \rightarrow y$

3. Skizzieren Sie die komplexe Zahl z in der Gauss'schen Zahlenebene, und bestimmen Sie Re(z), Im(z), |z|, arg(z):
   a) $z = 3 + 4j$ b) $z = -3 + 4j$ c) $z = j$
   d) $z = 3\,e^{j\pi/3}$ e) $z = e^{-j\pi/2}$ f) $z = -3$

4. Skizzieren Sie die komplexe Zahl z in der Gauss'schen Zahlenebene, und geben Sie z in der Exponentialform an:
   a) $z = 3 - 4j$ b) $z = -2$ c) $z = -5j$

5. Skizzieren Sie die komplexe Zahl z in der Gauss'schen Zahlenebene, und geben Sie z in der kartesischen Form an:
a) $z = 3\, e^{j\pi/3}$ b) $z = e^{j\pi}$ c) $z = 2\, e^{j5\pi/4}$

6. Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen
$z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 \cdot e^{j\phi_1}$
$z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 \cdot e^{j\phi_2}$

a) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für die Addition und Subtraktion, und drücken Sie die beiden Rechenregeln je durch einen deutschen Satz aus.
i) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j\,(y_1 + y_2)$ ii) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j\,(y_1 - y_2)$
Erklären Sie, warum es die beiden Rechenregeln nahe legen, komplexe Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene als Vektoren bzw. als sogenannte Zeiger darzustellen.

b) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für die Multiplikation und Division, und drücken Sie die beiden Rechenregeln je durch einen deutschen Satz aus.
i) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\phi_1+\phi_2)}$ ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\phi_1-\phi_2)}$

7. Gegeben ist die komplexe Zahl
$z = r \cdot e^{j\phi}$
Beweisen Sie die folgende Rechenregel für das Potenzieren mit einer ganzen Zahl, und drücken Sie die Rechenregel durch einen deutschen Satz aus:
$z^n = r^n \cdot e^{jn\phi}$

8. Gegeben sind die komplexen Zahlen
$z_1 = 3 + 4j$ $z_2 = -2 + 5j$ $z_3 = 2\, e^{j5\pi/4}$ $z_4 = 3\, e^{j\pi/3}$
Bestimmen Sie
a) $z_1 - z_2$ b) $-3z_1 + 6z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$
d) $z_3 \cdot z_4$ e) $\frac{3z_4}{4z_3}$ f) $\frac{2z_1}{z_2}$
g) $(z_1)^{10}$ h) $(z_3)^8$ i) $(z_4)^3$

9. Bestimmen Sie die zur komplexen Zahl z gehörende komplex konjugierte Zahl z*:
a) $z = -2 - 4j$ b) $z = 2\, e^{j5\pi/4}$ c) $z = -17$

10. Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgenden Behauptungen für zwei beliebige komplexe Zahlen z_1 und z_2 wahr oder falsch sind:

a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
d.h. Der Betrag einer Summe ist gleich der Summe der Beträge der einzelnen Summanden.

b) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
d.h. Die komplex Konjugierte einer Summe ist gleich der Summe der komplex Konjugierten der einzelnen Summanden.

c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
d.h. Der Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkt der Beträge der einzelnen Faktoren.

d) $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$
d.h. Die komplex Konjugierte eines Produktes ist gleich dem Produkt der komplex Konjugierten der einzelnen Faktoren.

11. Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgenden Behauptungen für eine beliebige komplexe Zahl z wahr oder falsch sind:
a) $z + z^* = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$ b) $z \cdot z^* = |z|^2$

12. In der Elektrotechnik könnte die folgende komplexe Zahl z vorkommen:

$$z = \frac{\left(R_1+j\omega L\right)\left(R_2+\frac{1}{j\omega C}\right)}{R_1+j\omega L+R_2+\frac{1}{j\omega C}} \qquad (R_1, R_2, \omega, L, C \quad R)$$

Bestimmen Sie den Betrag der Zahl z.

13. Bestimmen Sie alle Zahlen z, für welche gilt:

a) $z = z^*$ b) $z = -z$

c) $z = \frac{1}{z}$ d) $z = -\frac{1}{z}$

14. Nach der Euler'schen Formel gilt:

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$$

a) Drücken Sie $e^{-j\phi}$ mit Hilfe der Euler'schen Formel durch $\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$ aus.

b) Drücken Sie $\cos(\phi)$ durch $e^{j\phi}$ und $e^{-j\phi}$ aus.
Verwenden Sie dazu die Euler'sche Formel und das Resultat aus a).

c) Drücken Sie $\sin(\phi)$ durch $e^{j\phi}$ und $e^{-j\phi}$ aus.
Verwenden Sie dazu die Euler'sche Formel und das Resultat aus a).

Komplexe Exponentialfunktion

15. Gegeben ist die komplexe Exponentialfunktion

$$z(t) = e^{jt}.$$

Bestimmen Sie

a) $z(0)$ b) $z\left(\frac{\pi}{4}\right)$ c) $z\left(\frac{\pi}{2}\right)$

d) $z(\pi)$ e) $\left|z\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|$ f) $|z(t)|$, t R beliebig

16. Gegeben ist die komplexe Exponentialfunktion

$$z(t) = \hat{z}\, e^{j\omega_0 t}.$$

Bestimmen Sie

a) $\left(z(t)\right)^*$ b) $z\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)$ c) $z(t)\cdot\left(z(t)\right)^*$

Lösungen

1. a) Der Realteil einer komplexen Zahl
   - [x] ist reell.
   - [ ] ist imaginär.
   - [x] kann negativ sein.
   - [ ] ist nie gleich Null.

   b) Der Imaginärteil einer komplexen Zahl
   - [ ] ist imaginär.
   - [x] ist reell.
   - [x] kann negativ sein.
   - [ ] ist ein reelles Vielfaches von j.

   c) Der Betrag einer komplexen Zahl
   - [x] ist reell.
   - [ ] hat einen Imaginärteil ungleich Null.
   - [x] ist grösser oder gleich Null.
   - [x] ist eindeutig bestimmt.

   d) Das Argument einer komplexen Zahl
   - [x] ist reell.
   - [ ] hat einen Imaginärteil ungleich Null.
   - [ ] ist grösser oder gleich Null.
   - [ ] ist eindeutig bestimmt.

   e) Der Imaginärteil einer reellen Zahl
   - [x] ist gleich Null.
   - [ ] existiert nicht.

   f) Der Betrag einer reellen Zahl
   - [ ] ist die reelle Zahl selber.
   - [x] ist grösser oder gleich Null.

   g) Der Imaginärteil einer imaginären Zahl
   - [ ] ist die imaginäre Zahl selber.
   - [x] ist die imaginäre Zahl geteilt durch j.

   h) Der Betrag einer imaginären Zahl
   - [ ] ist gleich Null.
   - [ ] existiert nicht.

2. a) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

   b) $$\phi = \begin{cases} \text{nicht definiert} & (x=y=0) \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & (x>0 \quad y\geq 0) \\ \frac{\pi}{2} & (x=0 \quad y>0) \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & (x<0) \\ \frac{3\pi}{2} & (x=0 \quad y<0) \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & (x>0 \quad y<0) \end{cases}$$

   c) $x = r\cdot\cos(\phi)$

   d) $y = r\cdot\sin(\phi)$

3.

	Re	Im	Betrag	Argument
a)	$\mathrm{Re}(z) = 3$	$\mathrm{Im}(z) = 4$	$\lvert z\rvert = 5$	$\arg(z) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$
b)	$\mathrm{Re}(z) = -3$	$\mathrm{Im}(z) = 4$	$\lvert z\rvert = 5$	$\arg(z) = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi$
c)	$\mathrm{Re}(z) = 0$	$\mathrm{Im}(z) = 1$	$\lvert z\rvert = 1$	$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
d)	$\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}$	$\mathrm{Im}(z) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\lvert z\rvert = 3$	$\arg(z) = \frac{\pi}{3}$
e)	$\mathrm{Re}(z) = 0$	$\mathrm{Im}(z) = -1$	$\lvert z\rvert = 1$	$\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$
f)	$\mathrm{Re}(z) = -3$	$\mathrm{Im}(z) = 0$	$\lvert z\rvert = 3$	$\arg(z) = \pi$

4. a) $z = 5\ e^{-j\cdot\arctan(4/3)}$ b) $z = 2\ e^{j\pi}$ c) $z = 5\ e^{-j\pi/2}$

5. a) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,j$ b) $z = -1$ c) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,j$

6. a) i) Zwei komplexe Zahlen werden addiert, indem je ihre Realteile und ihre Imaginärteile addiert werden.

ii) Zwei komplexe Zahlen werden subtrahiert, indem je ihre Realteile und ihre Imaginärteile subtrahiert werden.

Stellt man eine komplexe Zahl $z = x + jy$ in der Gauss'schen Zahlenebene als Ortsvektor dar, so entsprechen die Komponenten dieses Vektors gerade dem Realteil x und dem Imaginärteil y der komplexen Zahl z.

Die Rechenregeln für die Addition bzw. Subtraktion komplexer Zahlen entsprechen dann gerade den Definitionen der Vektoraddition bzw. -subtraktion.

b) i) Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert werden.

ii) Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem ihre Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert werden.

7. Eine komplexe Zahl wird mit einer ganzen Zahl potenziert, indem ihr Betrag mit der ganzen Zahl potenziert und ihr Argument mit der ganzen Zahl multipliziert wird.

8. a) $5 - j$ b) $-21 + 18j$ c) $-26 + 7j$

d) $6\, e^{j19\pi/12}$ e) $\frac{9}{8}\, e^{-j11\pi/12}$ f) $\frac{28}{29} - \frac{46}{29}\, j$

g) $5^{10}\, e^{j \cdot 10\arctan(4/3)}$ h) 256 i) -27

9. a) $-2 + 4j$ b) $2\, e^{-j5\pi/4}$ c) -17

10. a) falsch b) wahr c) wahr

d) wahr

11. a) wahr b) wahr

12. $$|z| = \sqrt{\frac{\left(R_1^2+(\omega L)^2\right)\left(R_2^2+\frac{1}{(\omega C)^2}\right)}{(R_1+R_2)^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

13. a) $z \quad R$ b) $z = 0$

c) $z_1 = 1$ $z_2 = -1$ d) $z_1 = j$ $z_2 = -j$

14. a) $e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j\sin(\phi)$

b) $\cos(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right)$ c) $\sin(\phi) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\phi} - e^{-j\phi}\right)$

15. a) 1 b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$ c) j

d) -1 e) 1 f) 1

16. a) $\hat{z}\, e^{-j\omega_0 t}$ b) $-\hat{z}$ c) $(\hat{z})^2$