Parseval'sche Beziehung

Diskrete Fourier-Transformierte $\quad \mathrm{DFT}(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi mn/N}$

Parseval'sche Beziehung $\quad \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot\big(x[n]\big)^* \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m]\, e^{j2\pi mn/N}\right)^* \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \big(X[m]\big)^*\, e^{-j2\pi mn/N}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N}\, x[n]\, \big(X[m]\big)^*\, e^{-j2\pi mn/N}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N}\, x[n]\, \big(X[m]\big)^*\, e^{-j2\pi mn/N}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \big(X[m]\big)^* \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi mn/N}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \big(X[m]\big)^*\, X[m] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2
\end{aligned}$$

Physikalische Interpretation:

$x[n]$	:	"Signal" zur Zeit t = nT (elektr. Spannung, elektr. Stromstärke, ...)
$\lvert x[n]\rvert^2$		Momentanleistung des Signals zum Zeitpunkt t = nT (Proportionalitätskonstante hängt nur von Systemparametern ab, z.B. Widerstand R)
$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2$ $= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \lvert X[m]\rvert^2$		Aufsummierte Leistung des Signals zu den Zeitpunkten t = 0, T, ..., (N-1)T
$\lvert X[m]\rvert^2$		Leistung im Signal in der Frequenz $\omega = m\cdot\frac{2\pi}{NT}$