Repetitions-Übung 5 Fourier-Transformation für Abtastsignale (FTA), z-Transformation

Aufgaben

1. Wenn man ein periodisches zeitkontinuierliches Signal $x(t)$ abtastet, so ist das zeitdiskrete Signal $x[n]$ nur für bestimmte Abtastperioden ebenfalls periodisch.

   Gegeben ist das zeitkontinuierliche Signal $x(t) = \cos(3t)$.

   Bestimmen Sie alle möglichen Abtastperioden T_A, damit $x[n]$ die Grundperiode 4 hat.

2. Ein Sinussignal $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ mit unbekannter Grundfrequenz ω_0 wird mit der Abtastperiode $T_A = 7$ abgetastet. Man erhält so ein zeitdiskretes Signal $x[n]$ mit der Grundperiode $N_0 = 8$.

   Bestimmen Sie die unbekannte Grundfrequenz ω_0.

3. Gegeben ist die Impulsantwort $h[n]$ eines LTD-Systems sowie ein Eingangssignal $x[n]$:

   $$h[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-4]$$
   $$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon[n]$$

   Bestimmen Sie alle Funktionswerte des zum Eingangssignal $x[n]$ gehörigen Ausgangssignals $y[n]$.

   Ihre Bearbeitung soll vollständig im Zeitbereich stattfinden, d.h. sie sollen $y[n]$ bestimmen, ohne die Fourier- und/oder die z-Transformation zu verwenden.

4. Gegeben ist irgendeine zeitkontinuierliche, periodische Funktion $x(t)$ mit der Grundperiode T_0.

   Tastet man $x(t)$ mit einer bestimmten Abtastperiode T_1 ab, so erhält man die zeitdiskrete Funktion $x_1[n]$. Tastet man $x(t)$ mit einer anderen Abtastperiode T_2 ab, so erhält man im Allgemeinen eine andere zeitdiskrete Funktion $x_2[n]$.

   In einer Übungsaufgabe (Übung 24, Aufgabe 4) wurde festgestellt, dass $x_1[n]$ und $x_2[n]$ identisch sind, wenn sich T_2 von T_1 um ein ganzzahliges Vielfaches der Grundperiode T_0 unterscheidet, d.h.

   $$T_2 = T_1 + k \cdot T_0 \ (k \quad Z) \qquad \Rightarrow \qquad x_2[n] \equiv x_1[n]$$

   $X_{1a}(\omega)$ ist die Fourier-Transformierte (FTA) von $x_1[n]$ und $X_{2a}(\omega)$ die FTA von $x_2[n]$.

   Beurteilen Sie nun mit stichhaltiger Begründung, ob die folgende Behauptung richtig oder falsch ist:

   $$x_2[n] \equiv x_1[n] \qquad \Rightarrow \qquad X_{2a}(\omega) \equiv X_{1a}(\omega)$$

5. Gegeben ist die z-Transformierte $X(z)$ einer zeitdiskreten Funktion $x[n]$:

   $$X(z) = \frac{15z^{-3}}{3 - 7z^{-1} + 2z^{-2}} \qquad |z| > 2$$

   Bestimmen Sie die Funktion $x[n]$.

6. Gegeben ist die Fourier-Transformierte $X_a(\omega)$ einer zeitdiskreten Funktion $x[n]$:

   $$X_a(\omega) = \frac{e^{j\omega T}}{1 - 2e^{-j\omega T}} \qquad T = \text{Abtastperiode}$$

   Bestimmen Sie den Wert der z-Transformierten $X(z)$ von $x[n]$ an der Stelle $z = 3$.

7. Im Lehrbuch *Meyer* entnimmt man der Tabelle auf der Seite 186 das folgende z-Transformierten-Paar:

$$\varepsilon[n]\, e^{-an} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z - e^{-a}} \qquad |z| > e^{-a} \qquad (*)$$

Gegeben ist nun die folgende Funktion x[n]:

$$x[n] = e^{2n}\, \varepsilon[n].$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Beziehung (*) die Zahl

$$X(4) = ZT\big(x[n]\big)\Big|_{z=4}$$

8. Gegeben ist die folgende Funktion x[n]:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{2\pi}{7}\, n\right) \varepsilon[n-7]$$

Bestimmen Sie die z-Transformierte X(z) von x[n].

Benützen Sie dazu lediglich die Tabelle auf der Seite 186 im Buch *Meyer* sowie die Eigenschaften der z-Transformation.

9. Gegeben ist die Übertragungsfunktion H(z) eines kausalen LTD-Systems.
   i) Beurteilen Sie, ob das System stabil ist oder nicht.
   ii) Bestimmen Sie den Frequenzgang $H_a(\omega)$ des Systems.

   a) $H(z) = \dfrac{1 - z^{-1} - 5z^{-2} - 3z^{-3}}{1 - 3z^{-1}}$

   b) $H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$

Lösungen

1. $T_A = m\,\frac{\pi}{6}$ (m Z beliebig, jedoch ungerade)

2. $\omega_0 = m\,\frac{\pi}{28}$ (m Z beliebig, jedoch ungerade)

3. $y[n] = 0 \ (n<0)$
$y[0] = 1$
$y[1] = 1 + \frac{1}{2}$
$y[2] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$y[3] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
$y[4] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$
$y[5] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$
...
$y[n] = 0 \ (n<0)$
$y[0] = 1$
$y[1] = \frac{3}{2}$
$y[2] = \frac{7}{4}$
$y[n] = 15\left(\frac{1}{2}\right)^n \ (n\geq 3)$

4. $X_a(\omega)$ hängt von der Abtastperiode T ab
Behauptung falsch

5. $x[n] = \frac{6^{n-2} - 1}{3^{n-3}}\,\varepsilon[n-3]$

6. X(3) existiert nicht

7. X(4) existiert nicht

8. $$X(z) = \frac{1}{3^8}\,\frac{z^{-8}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \frac{1}{9}z^{-2}} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

9. a) i) nicht stabil
ii) $H_a(\omega)$ existiert nicht
b) i) stabil
ii) $H_a(\omega) = 1 + 2e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T}$