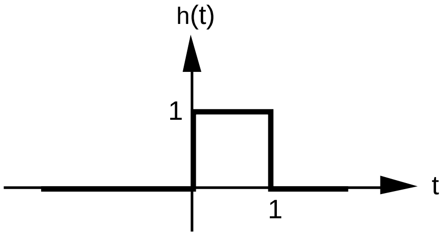
Repetitions-Übung 4 Fourier-Transformation, Laplace-Transformation

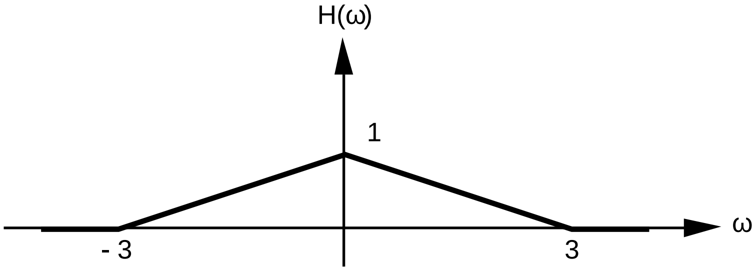
Aufgaben

1. Gegeben ist der Graf der Einheitsimpuls-Übertragungsfunktion h(t) eines LTI-Systems:



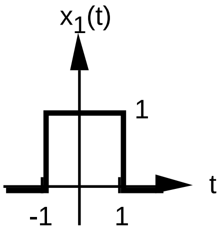
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und den Grafen des zum Eingangssignal $x(t) = \varepsilon(t)$ gehörenden Ausgangssignals y(t).
Allfällige Integrale müssen ohne Taschenrechner berechnet werden.

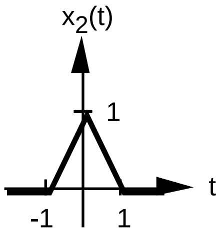
2. Gegeben ist der Graf des Frequenzganges $H(\omega)$ eines LTI-Systems:

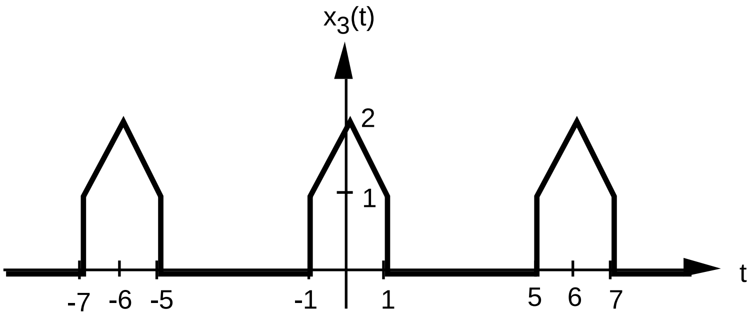


Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des zum Eingangssignal
$x(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t)$ gehörenden Ausgangssignals y(t).

3. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ sowie der periodischen Funktion $x_3(t)$:







Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ durch die als bekannt vorausgesetzten Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ aus.
Sie sollen also nicht den konkreten Ausdruck für $X_3(\omega)$ berechnen, sondern den Zusammenhang zwischen $X_3(\omega)$ und den beiden bekannten Transformierten $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ angeben.

4. Gegeben sind die beiden Funktionen

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (-1<T<1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \cos(20\cdot t) + 2\cdot\cos(40\cdot t)$$

Nun wird das Produkt $x(t) := x_1(t)\cdot x_2(t)$ gebildet.

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von $x(t)$, und zeichnen Sie den Grafen von $X(\omega)$.

Aus Ihrer grafischen Darstellung von $X(\omega)$ sollte man die Funktionsgleichung von $X(\omega)$ herauslesen können.

5. Bei einem kausalen LTI-System seien das Eingangssignal $u_x(t)$ und das Ausgangssignal $u_y(t)$ durch die folgende Differentialgleichung verknüpft:

$$(R_1+R_2)\,\frac{du_y}{dt}(t) + \frac{1}{C_2}\,u_y(t) = R_2\,\frac{du_x}{dt}(t) + \frac{1}{C_2}\,u_x(t)$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(s)$ des LTI-Systems.
b) Beurteilen Sie, ob das System stabil ist oder nicht.

6. Einer Laplace-Transformations-Tabelle entnimmt man das folgende Laplace-Transformiertenpaar:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\alpha t}\,\varepsilon(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(s+\alpha)^n} \quad \big(\mathrm{Re}(s)>-\alpha\big) \qquad (*)$$

Prüfen Sie (*) für den Fall $n = 2$ nach.
Bestimmen Sie also ausgehend von der Definition der Laplace-Transformation die Laplace-Transformierte der Funktion auf der linken Seite von (*).

Das Integral zur Bestimmung der Laplace-Transformierten müssen Sie ohne Taschenrechner lösen. Die Stammfunktion des Integranden können Sie jedoch in einer Integraltabelle nachschlagen.

7. Von einem LTI-System kennt man einen Input $x_1(t)$ und den dazugehörigen Output $y_1(t)$:

$$x_1(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$$
$$y_1(t) = e^{-2(t-1)}\,\varepsilon(t-1)$$

Bestimmen Sie den Output $y_2(t)$, welcher zum folgenden Input $x_2(t)$ gehört:

$$x_2(t) = \delta(t-3)$$

8. Von einem zeitkontinuierlichen LTI-System kennt man die Stossantwort $h(t)$ sowie die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ eines Eingangssignals $x(t)$:

$$h(t) = e^{t}\,\varepsilon(t)$$
$$X(j\omega) = \frac{1}{4+\omega^2}$$

Bestimmen Sie das zum Eingangssignal $x(t)$ gehörige Ausgangssignal $y(t)$.

9. Der Frequenzgang $H(j\omega)$ eines kausalen LTI-Systems ist gegeben durch

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

Gegeben ist zusätzlich das Eingangssignal

$$x(t) = e^{2t}\,\varepsilon(t)$$

a) Bestimmen Sie den Wert der Systemfunktion $H(s)$ an der Stelle $s=-2$.
b) Bestimmen Sie das zum Eingangssignal $x(t)$ gehörige Ausgangssignal $y(t)$.

Lösungen

1. $y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ t & (0<t<1) \\ 1 & (t>1) \end{cases}$

2. $y(t) = \frac{2}{3}\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(2t)$

3. $X_3(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{3}\left(X_1\left(k\frac{\pi}{3}\right) + X_2\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)\delta\left(\omega - k\frac{\pi}{3}\right)$

4. ...

5. a) $H(s) = \frac{R_2C_2s + 1}{(R_1+R_2)C_2s + 1}$

   b) stabil

6. ...

7. $y_2(t) = \delta(t-4) - e^{-2(t-4)}\varepsilon(t-4)$

8. $y(t) = \frac{1}{3}e^{t}\,\varepsilon(t) + \frac{1}{4}e^{2t}\,\varepsilon(-t) + \frac{1}{12}e^{-2t}\,\varepsilon(-t)$

9. a) H(-2) existiert nicht.

   b) $y(t) = -\frac{1}{3}(e^{-t} - e^{2t})\,\varepsilon(t)$