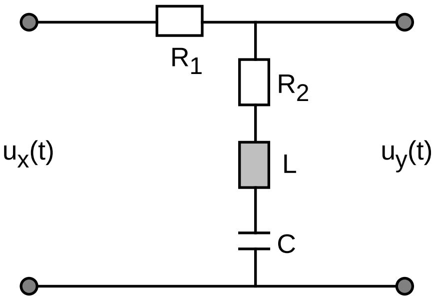
# Repetitions-Übung 2 Laplace-Transformation, Fourier-Transformation für Abtastsignale, Diskrete Fourier-Transformation

## Aufgaben

1. *(Klausur 30.5.2001)*

Ein LTI-System bestehe aus dem abgebildeten Stromkreis:




Der algebraische Ausdruck der Übertragungsfunktion H(s) des Systems lautet

$$H(s) = \frac{LCs^2+R_2Cs+1}{LCs^2+(R_1+R_2)Cs+1}$$

a) Jemand macht nun die folgende Aussage über die Kausalität und Stabilität des Systems:

"Beim vorliegenden System gilt, dass es entweder **kausal und stabil** oder **weder kausal noch stabil** sein muss, und zwar unabhängig von den Werten für $R_1$, $R_2$, C und L.
Es ist also nicht möglich, dass das System kausal aber nicht stabil oder dass es nicht kausal aber stabil wäre."

Beurteilen Sie mit Begründung, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

b) Die Werte für $R_1$, $R_2$, C und L seien nun wie folgt gegeben:

$R_1 = 1\ \text{M}\Omega$ $R_2 = 2\ \text{M}\Omega$ $C = 1\ \mu\text{F}$ $L = 0\ \text{H}$ (Spule kurzgeschlossen)

Bestimmen Sie den zum folgenden Input $u_x(t)$ gehörigen Output $u_y(t)$:

$$u_x(t) = e^{-2t}\,\varepsilon(t)$$

2. *(Klausur 30.5.2001)*

Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist:

Die Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ und $Y_a(\omega)$ zweier zeitdiskreter Signale x[n] und y[n] sind genau dann identisch, wenn die Signale x[n] und y[n] selber identisch sind, d.h.

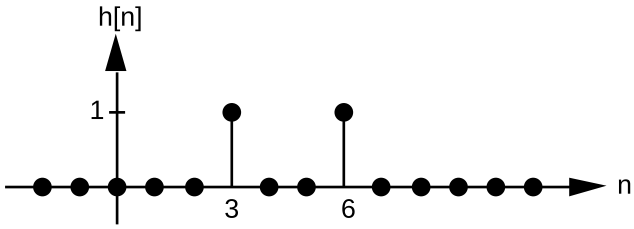
$$x[n] \equiv y[n] \quad \Leftrightarrow \quad X_a(\omega) \equiv Y_a(\omega)$$

Beurteilen Sie beide Teile der Äquivalenz "⇔", d.h. sowohl " " als auch " ".

3. (siehe Seite 2)

3. *(Klausur 22.8.2001)*

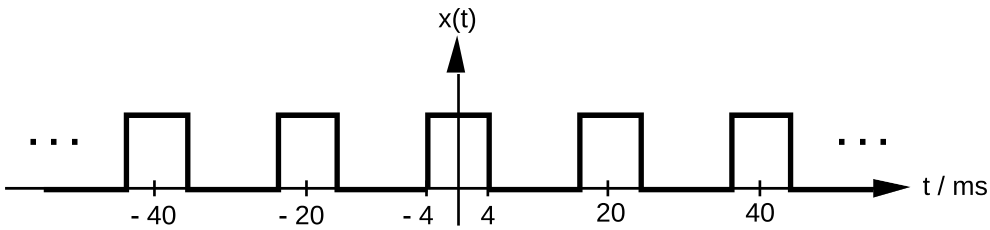
Gegeben ist der Graf der Impulsantwort h[n] eines LTD-Systems:




Bestimmen Sie den zum Eingang $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$ gehörigen Ausgang y[n].

4. *(Klausur 22.8.2001)*

Der Graf eines zeitkontinuierlichen Signals x(t) sieht wie folgt aus:

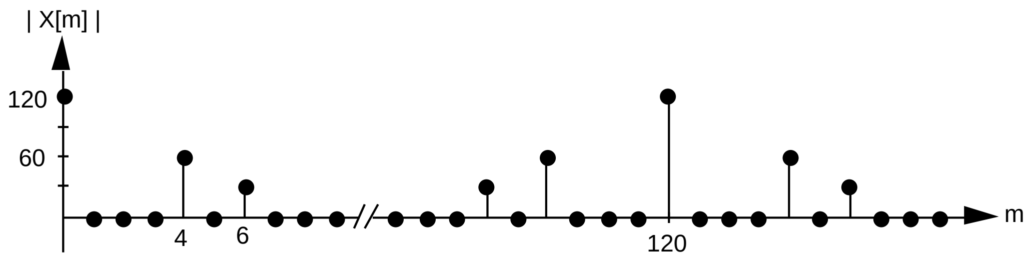



Das Signal x(t) soll nun ideal abgetastet werden.

Bestimmen Sie, in welchem Bereich die Abtastperiode liegen muss, damit das Signal später wieder fehlerfrei rekonstruiert werden kann.

5. *(Klausur 22.8.2001)*

Ein zeitkontinuierliches, periodisches Signal x(t) mit der Grundperiode $T_0 = 6$ wird gefenstert und abgetastet (Fensterlänge N = 120, Abtastperiode $T_a = 0.1$). Dabei werde das Abtasttheorem erfüllt. Das so erhaltene zeitdiskrete Signal wird der diskreten Fourier-Transformation (DFT) unterzogen. Die folgende Grafik zeigt einen Ausschnitt des Betrages |X[m]| der Transformierten X[m]. Für das Argument arg(X[m]) gelte $\arg(X[m]) \equiv 0$.




a) Zeichnen Sie |X[m]| für den Fall, dass N nur halb so gross gewesen wäre (bei gleichem $T_a$), d.h. N = 60.

b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung x(t) = ... des Signals x(t).

6. (siehe Seite 3)

6. *(Klausur 7.6.2002)*

Gegeben ist das folgende zeitkontinuierliche Signal y(t):

$$y(t) = t\ e^{-2t}\ \varepsilon(t-1)$$

a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte Y(s) von y(t).

Bestimmen Sie Y(s) ohne Taschenrechner, jedoch mit Hilfe von Transformationstabellen und den Eigenschaften der Laplace-Transformation.

b) Beurteilen Sie mit vollständiger Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

"Wenn y(t) das Ausgangssignal eines kausalen LTI-Systems ist, dann ist das LTI-System sicher stabil."

Falls Sie für diese Teilaufgabe b) die Laplace-Transformierte Y(s) von y(t) benötigen sollten, unter a) jedoch kein Resultat erhalten haben, dann verwenden Sie das folgende Y(s):

$$Y(s) = e^{s+3}\ \frac{s+2}{(s+3)^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3$$

**Lösungen**

1. a) wahr

   b) $u_y(t) = \frac{1}{15}\,(e^{-t/3} + 9\,e^{-2t})\,\varepsilon(t)$

2. " " falsch

   " " richtig

3. $y[n] = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\,n\right)$

4. Das Abtasttheorem ist mit keiner noch so kleinen Abtastperiode vollständig erfüllbar. Daher ist eine genaue Rekonstruktion unmöglich.

5. a) Die Ausschläge befinden sich nun bei m = ..., 0, 2, 3, 57, 58, 60, 62, 63, ... (statt wie vorher bei m = ..., 0, 4, 6, 114, 116, 120, 124, 126, ...). und sind halb so hoch wie vorher.

   b) $x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\,t\right) + \frac{1}{2}\cos(\pi t)$

6. a) $Y(s) = e^{-(s+2)}\,\frac{s+3}{(s+2)^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -2$

   b) ...