Übung 36 LTD-System
Übertragungsfunktion H(z) ↔ Differenzengleichung

Lernziele

- aus der Differenzengleichung eines LTD-Systems die dazugehörige Übertragungsfunktion herleiten können.
- aus der Übertragungsfunktion eines LTD-Systems die dazugehörige Differenzengleichung herleiten können.
- eine Differenzengleichung rekursiv lösen können.

Aufgaben

1. Leiten Sie aus der gegebenen Differenzengleichung eines LTD-Systems die dazugehörige Übertragungsfunktion H(z) her:

   a) $y[n] - \frac{5}{2}\, y[n-1] + y[n-2] = x[n] - 2\, x[n-1]$

   b) $y[n] = \frac{1}{2}\, x[n] + 3\, x[n-1] + 2\, y[n-1] - \frac{1}{3}\, y[n-2] + \frac{1}{4}\, y[n-3]$

2. Leiten Sie aus der gegebenen Übertragungsfunktion H(z) die dazugehörige Differenzengleichung her.

   a) Finden Sie zuerst die Methode, d.h. wie man allgemein aus H(z) die Differenzengleichung gewinnt.
   Beschreiben Sie die Methode in ein paar deutschen Sätzen.

   b) $H(z) = \dfrac{1 - z^{-1} - 5z^{-2} - 3z^{-3}}{1 - 3z^{-1}}$

   c) $H(z) = \dfrac{3z^3 - z^2 + 4z}{2z^3 + 3z^2 - 5z - 1}$

   d) $H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$

3. Gegeben ist die folgende Differenzengleichung

   $$y[n] - \frac{1}{2}\, y[n-1] = x[n]$$

   Lösen Sie die Differenzengleichung für den Eingang $x[n] = \delta[n]$ mit Hilfe der rekursiven Methode für den angegebenen Anfangswert.

   a) $y[-1] = 1$
   b) $y[-1] = 2$
   c) y[...] = ... (eigenen Anfangswert vorgeben)

4. Gegeben ist die Übertragungsfunktion H(z) eines LTD-Systems:

   $$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}\, z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}\, z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\, z^{-1}\right)}$$

   wobei die Fourier-Transformierte $H_a(\omega)$ existieren soll, sowie das Eingangssignal

   $$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon[n]$$

   Bestimmen Sie das Ausgangssignal y[n] mit der angegebenen Methode.

   a) mit Hilfe der Faltung, d.h. $y[n] = x[n] * h[n]$

   b) mit Hilfe der Differenzengleichung und der rekursiven Methode

   c) mit Hilfe des Faltungssatzes der z-Transformation

Lösungen

1. a) $H(z) = \dfrac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$

b) $H(z) = \dfrac{\frac{1}{2} + 3z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}}$

2. a) ...

b) $y[n] - 3\,y[n-1] = x[n] - x[n-1] - 5\,x[n-2] - 3\,x[n-3]$

c) $2\,y[n] + 3\,y[n-1] - 5\,y[n-2] - y[n-3] = 3\,x[n] - x[n-1] + 4\,x[n-2]$

d) $y[n] = x[n] + 2\,x[n-1] + x[n-2]$

3. a) $y[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n & (n<0) \\ \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n & (n\geq 0) \end{cases}$

b) $y[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & (n<0) \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & (n\geq 0) \end{cases}$

c) ...

4. a) $h[n] = \left(-9\left(\frac{1}{4}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\varepsilon[n]$

$y[n] = x[n] * h[n] = \left(9\left(\frac{1}{4}\right)^n - 20\left(\frac{1}{3}\right)^n + 12\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\varepsilon[n]$

b) $y[n] - \frac{7}{12}\,y[n-1] + \frac{1}{12}\,y[n-2] = x[n] + \frac{1}{2}\,x[n-1]$

$y[n] = \left(9\left(\frac{1}{4}\right)^n - 20\left(\frac{1}{3}\right)^n + 12\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\varepsilon[n]$

c) $X(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$= 9\,\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - 20\,\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + 12\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$y[n] = \left(9\left(\frac{1}{4}\right)^n - 20\left(\frac{1}{3}\right)^n + 12\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\varepsilon[n]$