Übung 31 LTD-System
Eigenfunktionen von LTD-Systemen

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt erarbeiten können.
- verstehen, dass ein komplexes exponentielles Signal eine Eigenfunktion eines LTD-Systems ist.
- verstehen, dass ein LTD-System mit reeller Impulsantwort einen sinusförimigen Input in einen sinusförmigen Output mit derselben Frequenz überführt.

Aufgaben

1. * $X_a(\omega)$ sei die Fourier-Transformierte (FTA) einer beliebigen zeitdiskreten, **reellen** Funktion x[n].
   a) Zeigen Sie, dass gilt:
   $$\left(X_a(\omega)\right)^* = X_a(-\omega)$$
   b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass
      i) $|X_a(\omega)|$ eine **gerade** Funktion ist.
      ii) $\arg\left(X_a(\omega)\right)$ eine **ungerade** Funktion ist.

2. Gegeben ist ein LTD-System mit einer **beliebigen** Impulsantwort h[n] und das **komplexe exponentielle** Eingangssignal
   $x[n] = e^{j\omega_0 nT}$ (T = Abtastperiode)
   Bestimmen Sie das zu x[n] gehörende Ausgangssignal y[n].
   Stellen Sie dabei fest, dass y[n] ein Vielfaches von x[n] ist, d.h. dass x[n] eine **Eigenfunktion** des LTD-Systems ist.

3. Gegeben ist ein LTD-System mit einer **reellen** Impulsantwort h[n] und das **sinusförmige** Eingangssignal
   $x[n] = \hat{x}\,\sin(\omega_0 nT+\varphi)$ (T = Abtastperiode)
   Bestimmen Sie das zu x[n] gehörende Ausgangssignal y[n].
   Stellen Sie dabei fest, dass y[n] ein **sinusförmiges** Signal ist mit derselben Frequenz wie das Eingangssignal x[n].

   Hinweise:
   - Resultate aus den Aufgaben 1 und 2 benützen
   - Euler'sche Beziehung $\sin(x) = \frac{1}{2j}\,(e^{jx}-e^{-jx})$ benützen

Lösungen

1. * a) (Definition von $X_a(\omega)$ (Meyer, Formel (5.2.-3), Seite 137) betrachten)
...
b) i) ($X_a(\omega)$ in der Exponentialform "Betrag mal e hoch j mal Argument" darstellen)
...
ii) (dito)
...

2. $y[n] = x[n] * h[n] = ... = H_a(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 nT} = H_a(\omega_0) \cdot x[n] \qquad \left(H_a(\omega) = \mathrm{FTA}\left(h[n]\right)\right)$

3. $y[n] = |H_a(\omega_0)| \, \hat{x} \sin\left(\omega_0 nT + \phi + \arg\left(H_a(\omega_0)\right)\right)$