Übung 28 Diskrete Fourier-Transformation (DFT) Informationsgehalt der DFT, Zusammenhang DFT-FR

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt bearbeiten können.
- wissen und verstehen, wieviel Information in der diskreten Fourier-Transformierten einer zeitdiskreten Funktion enthalten ist.
- den Zusammenhang zwischen der diskreten Fourier-Transformierten einer zeitdiskreten Funktion und den Fourier-Koeffizienten der dazugehörigen periodisch fortgesetzten Abtastfunktion verstehen.
- verstehen, wie weit die diskrete Fourier-Transformierte einer zeitdiskreten Funktion den Fourier-Koeffizienten einer periodischen, zeitkontinuierlichen Funktion entsprechen.

Aufgaben

Informationsgehalt der DFT

1. Bei der Bestimmung der diskreten Fourier-Transformierten X[m] einer zeitdiskreten, reellen Funktion x[n] werden N voneinander unabhängige Informationen über x[n] verwendet, nämlich die **N reellen Zahlen** x[0], x[1], ... , x[N-1].
In der Transformierten X[m] können also höchstens N voneinander unabhängige Informationen über x[n] enthalten sein. X[m] besteht jedoch scheinbar aus unendlich vielen Informationen, nämlich aus den **unendlich vielen komplexen Zahlen** ... , X[-2], X[-1], X[0], X[1], X[2], ...

In den Formeln (5.3.-10) und (5.3.-11) (*Meyer*, Seite 151) sind Eigenschaften der DFT ausgedrückt.
Aus diesen Eigenschaften folgt, dass die Werte in X[m] voneinander abhängen. Diese Abhängigkeiten führen tatsächlich dazu, dass die Transformierte X[m] nur N voneinander unabhängige Informationen über x[n] enthält, d.h. dass X[m] nur N reelle Zahlen enthält, die unabhängig voneinander sind.

a) Prüfen Sie die Herleitung der Formeln (5.3.-10) und (5.3.-11) (*Meyer*, Seite 151) nach.

b) Geben Sie an, aus welchen N voneinander unabhängigen reellen Zahlen die Transformierte X[m] besteht, falls
i) N = 7
ii) N = 6
iii) * N beliebig jedoch **ungerade** ist.
iv) * N beliebig jedoch **gerade** ist.

Zusammenhang DFT - FR

2. Gegeben ist die zeitkontinuierliche Funktion $x(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$

a) Skizzieren Sie für allgemeines T und N die Grafen der folgenden, auf dem Theorieblatt definierten Funktionen:

$x(t)$	$x_N(t)$	$\tilde{x}_N(t)$
$x_a(t)$	$x_{N,a}(t)$	$\tilde{x}_{N,a}(t)$
$x[n]$	$x_N[n]$	$\tilde{x}_N[n]$

b) Bestimmen Sie

i) die Fourier-Transformierte $X_{N,a}(\omega)$ von $x_{N,a}(t)$ bzw. $x_N[n]$.

ii) die Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$.
Hinweis: $c_{a,m}$ sind Abtastwerte von $X_{N,a}(\omega)$

iii) die diskrete Fourier-Transformierte X[m] von x[n].

iv) Vergleichen Sie ii) mit iii), und stellen Sie fest, dass gilt:

$$c_{a,m} = \frac{1}{NT} X[m]$$

c) Studieren Sie das MAPLE-File dft.mws. Sie finden es unter
http://www.tel.fh-htwchur.ch/~borer → Mathematik → Unterlagen (...)

i) Betrachten Sie die Grafen der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ von $x(t)$ und der Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ von $x_a(t)$.
Stellen Sie dabei fest, dass $X_a(\omega)$ eine periodische Fortsetzung von $X(\omega)$ ist.

ii) Betrachten Sie die Grafen der Fourier-Transformierten $X_N(\omega)$ von $x_N(t)$ und der Fourier-Transformierten $X_{N,a}(\omega)$ von $x_{N,a}(t)$.
Stellen Sie dabei fest, dass $X_{N,a}(\omega)$ eine periodische Fortsetzung von $X_N(\omega)$ ist.

iii) Vergleichen Sie die diskrete Fourier-Transformierte $X[m]$ von $x[n]$ mit den Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$, und stellen Sie fest, dass gilt:

$$c_{a,m} = \frac{1}{NT} X[m]$$

Variieren Sie die Abtastperiode T und die Länge N des Zeitfensters, und beurteilen Sie jeweils, wie gut das Abtasttheorem erfüllt ist.

3. Im Unterricht wurde hergeleitet, dass die Werte der diskreten Fourier-Transformierten $X[m]$ der Funktion $x[n]$ bis auf eine multiplikative Konstante NT gerade die Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$ sind:

$$c_{a,m} = \frac{1}{NT} X[m]$$

Sie sollen in dieser Aufgabe zeigen, dass **unter Einhaltung des Abtasttheorems** die folgenden drei Aussagen richtig sind:

(1) Die Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$ sind bis auf eine multiplikative Konstante T gerade die Fourier-Koeffizienten c_m der Funktion $\tilde{x}_N(t)$:

$$c_{a,m} = \frac{1}{T} c_m$$

(2) Die Werte der diskreten Fourier-Transformierten $X[m]$ der Funktion $x[n]$ sind bis auf eine multiplikative Konstante N gerade die Fourier-Koeffizienten c_m der Funktion $\tilde{x}_N(t)$:

$$c_m = \frac{1}{N} X[m]$$

(3) Wird eine periodische Funktion $x(t)$ der Grundperiode T_0 so abgetastet und gefenstert, dass die Fensterlänge NT gerade gleich T_0 beträgt, so sind die Werte der diskreten Fourier-Transformierten $X[m]$ bis auf eine multiplikative Konstante N die Fourier-Koeffizienten c_m der Funktion $x(t)$.

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

a) Skizzieren Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $\tilde{X}_N(\omega)$ von $\tilde{x}_N(t)$.
Nehmen Sie dabei an, dass das Frequenzspektrum $\tilde{X}_N(\omega)$ begrenzt sei.

b) Skizzieren Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$.
Nehmen Sie dabei an, dass beim Übergang $\tilde{x}_N(t) \to \tilde{x}_{N,a}(t)$ das Abtasttheorem eingehalten werde.

c) Die Grafen von $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ und $\tilde{X}_N(\omega)$ bestehen je aus einer Linearkombination von δ-Funktionen. Vergleichen Sie die "Gewichte" der δ-Peaks in $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ und $\tilde{X}_N(\omega)$, und zeigen Sie, dass daraus die Aussage (1) folgt.

d) Zeigen, Sie dass aus dem im Unterricht hergeleiteten Zusammenhang zwischen $c_{a,m}$ und $X[m]$ zusammen mit der Aussage (1) die Aussage (2) folgt.

e) Zeigen Sie, dass aus den Erkenntnissen der Aufgaben a) bis d) die Aussage (3) folgt.

Lösungen

1. a) ...

b)

i) $X[0]$ (reell!), $|X[1]|$, $\arg(X[1])$, $|X[2]|$, $\arg(X[2])$, $|X[3]|$, $\arg(X[3])$

bzw. $X[0]$ (reell!), $\mathrm{Re}(X[1])$, $\mathrm{Im}(X[1])$, $\mathrm{Re}(X[2])$, $\mathrm{Im}(X[2])$, $\mathrm{Re}(X[3])$, $\mathrm{Im}(X[3])$

ii) $X[0]$ (reell!), $|X[1]|$, $\arg(X[1])$, $|X[2]|$, $\arg(X[2])$, $X[3]$ (reell!)

bzw. $X[0]$ (reell!), $\mathrm{Re}(X[1])$, $\mathrm{Im}(X[1])$, $\mathrm{Re}(X[2])$, $\mathrm{Im}(X[2])$, $X[3]$ (reell!)

iii) * $X[0]$ (reell!), $|X[1]|$, $\arg(X[1])$, ..., $\left|X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right|$, $\arg\left(X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right)$

bzw. $X[0]$ (reell!), $\mathrm{Re}(X[1])$, $\mathrm{Im}(X[1])$, ..., $\mathrm{Re}\left(X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right)$, $\mathrm{Im}\left(X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right)$

iv) * $X[0]$ (reell!), $|X[1]|$, $\arg(X[1])$, ..., $\left|X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right|$, $\arg\left(X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right)$, $X\left[\frac{N}{2}\right]$ (reell!)

bzw. $X[0]$ (reell!), $\mathrm{Re}(X[1])$, $\mathrm{Im}(X[1])$, ..., $\mathrm{Re}\left(X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right)$, $\mathrm{Im}\left(X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right)$, $X\left[\frac{N}{2}\right]$ (reell!)

2. a) ...

b)

i) $$X_{N,a}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N[n]\, e^{-jn\omega T} = \ldots = \frac{1-\left(e^{-T}e^{-j\omega T}\right)^N}{1-e^{-T}e^{-j\omega T}}$$

ii) $T_0 = NT =$ Grundperiode von $\tilde{x}_{N,a}(t)$, $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

$$c_{a,m} = \frac{1}{T_0} X_{N,a}(m\omega_0) = \ldots = \frac{1}{NT}\,\frac{1-e^{-NT}}{1-e^{-T}e^{-j2\pi m/N}}$$

iii) $$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi mn/N} = \ldots = \frac{1-e^{-NT}}{1-e^{-T}e^{-j2\pi m/N}}$$

iv) ...

c) ...

3. a) $\tilde{X}_N(\omega)$ ist eine Linearkombination von δ-Funktionen an den Stellen $\omega = m \cdot \frac{2\pi}{T_0}$ $(m \in \mathbb{Z})$.

b) $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ geht aus $\tilde{X}_N(\omega)$ hervor durch eine periodische Fortsetzung mit der Grunderiode $\frac{2\pi}{T}$ und einer Gewichtung mit dem Faktor $\frac{1}{T}$.

c) (siehe Seite 4)

c) Die "Gewichte" der δ-Peaks in $\tilde{X}_N(\omega)$ betragen $2\pi \cdot c_m$.

Die "Gewichte" der δ-Peaks in $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ betragen einerseits $2\pi \cdot c_{a,m}$. Wegen der periodischen Fortsetzung und Gewichtung von $\tilde{X}_N(\omega)$ betragen sie andererseits $\frac{1}{T} \cdot 2\pi \cdot c_m$.

$$2\pi \cdot c_{a,m} = \frac{1}{T} \cdot 2\pi \cdot c_m$$

$$c_{a,m} = \frac{1}{T} c_m \qquad (1)$$

d) ...

e) Wird x(t) so abgetastet und gefenstert, dass $NT = T_0$, dann folgt $x(t) = \tilde{x}_N(t)$, und aus (2) folgt (3).