Übung 27 "Intermezzo"
Fourier-Koeffizienten einer periodisch fortgesetzten Funktion

Lernziele

- verstehen, dass eine Funktion sowohl durch Aufaddieren verschobener Versionen der Funktion als auch durch Faltung mit einer Deltafolge periodisch fortgesetzt werden kann.
- wissen, dass die Fourier-Transformierte einer Deltafolge wieder eine Deltafolge ist.
- an einem konkreten Beispiel nachprüfen können, dass die Fourier-Koeffizienten einer periodisch fortgesetzten Funktion Abtastwerte der Fourier-Transformierten der ursprünglichen Funktion sind.

Einleitung

Eine Funktion $x_0(t)$ wird mit der Grundperiode T_0 periodisch fortgesetzt, indem Teilfunktionen $x_0(t-kT_0)$ (k Z), welche man durch entsprechende Zeitverschiebungen von $x_0(t)$ gewinnt, aufaddiert werden. Man erhält so die periodische Funktion x(t):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t-kT_0) \qquad (1)$$

Aufgaben

1. Die periodische Fortsetzung von $x_0(t)$ kann auch durch eine Faltung von $x_0(t)$ mit einer Deltafolge erreicht werden:

$$x(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0) \qquad (2)$$

a) Skizzieren Sie den Grafen der Deltafolge $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0)$

b) Zeigen Sie, dass die rechten Seiten der Beziehungen (1) und (2) identisch sind.

Hinweis:
Führen Sie die Faltung in (2) im Zeitbereich aus.

c) Bestimmen Sie von Hand die Fourier-Transformierte der Deltafolge $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0)$

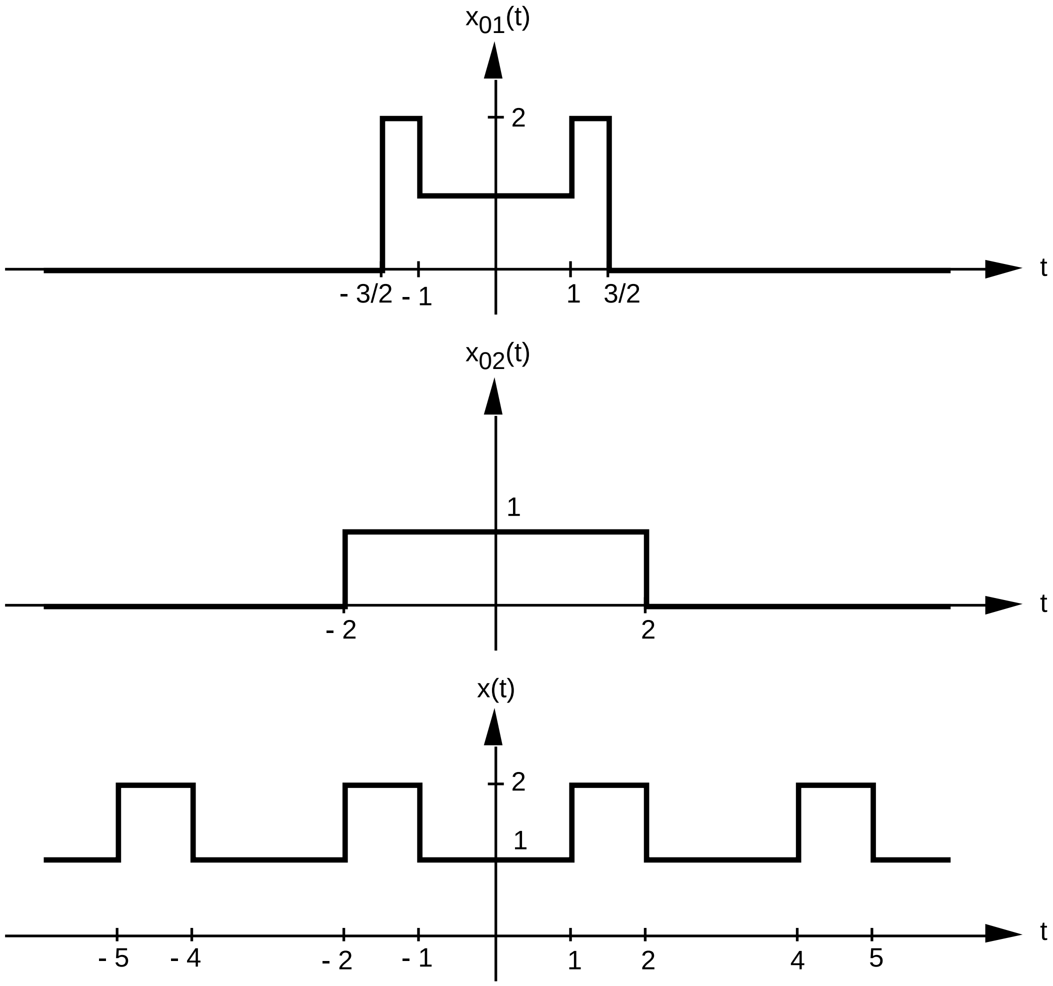
Hinweise:
i) Die Deltafolge ist eine periodische Funktion.
ii) Fassen Sie die Deltafolge als periodische Fortsetzung eines einzelnen Deltastosses auf.

2. Im Unterricht wurde bewiesen, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k von x(t) Abtastwerte der Fourier-Transformierten $X_0(\omega)$ von $x_0(t)$ sind:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_0(k\omega_0) \qquad (3)$$

Die Beziehung (3) gilt unabhängig davon, ob sich die Teilfunktionen $x_0(t-kT_0)$ (k Z) "überlappen" oder nicht.

Betrachten Sie nun die Grafen der Funktionen $x_{01}(t)$, $x_{02}(t)$ und x(t):



a) Prüfen Sie nach, dass x(t) eine periodische Fortsetzung sowohl von $x_{01}(t)$ ("ohne Überlappung") als auch von $x_{02}(t)$ ("mit Überlappung") ist.

b) Prüfen Sie die Beziehung (3) für beide Funktionen $x_{01}(t)$ und $x_{02}(t)$ nach.

Lösungen

1. a) ...

b) ...

c) $$\mathrm{FT}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0)\right) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-k\omega_0) \qquad \left(\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}\right)$$

2. a) ... $(T_0 = 3)$

b) $$X_{01}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{4\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right) - 2\sin(\omega)}{\omega} & (\omega\neq 0) \\ 4 & (\omega=0) \end{cases}$$

$$X_{02}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(2\omega)}{\omega} & (\omega\neq 0) \\ 4 & (\omega=0) \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2} x(t)\cdot e^{-jk(2\pi/3)t}\,dt = \begin{cases} -\dfrac{\sin\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right)}{k\pi} & (k\neq 0) \\ \dfrac{4}{3} & (k=0) \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_{01}(k\omega_0) = \frac{1}{3} X_{01}\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\sin\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right)}{k\pi} & (k\neq 0) \\ \dfrac{4}{3} & (k=0) \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_{02}(k\omega_0) = \frac{1}{3} X_{02}\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(k\,\frac{4\pi}{3}\right)}{k\pi} & (k\neq 0) \\ \dfrac{4}{3} & (k=0) \end{cases}$$

Es gilt $-\sin\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(k\,\frac{4\pi}{3}\right)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.