Übung 25 Fourier-Transformation für Abtastsignale (FTA)
Periodizität, Bestimmung der Fourier-Transformierten

Lernziele

- verstehen, dass das Spektrum einer abgetasteten Funktion periodisch ist.
- verstehen, wie die Grundperiode des Spektrums einer abgetasteten Funktion von der Abtastperiode abhängt.
- die Fourier-Transformierte einer einfacheren zeitdiskreten Funktion von Hand bestimmen können.

Aufgaben

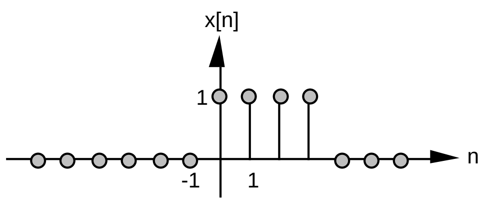
1. Die Formel (5.2.-9) (*Meyer*, Seite 139) gibt den Zusammenhang zwischen dem Spektrum $X(\omega)$ der zeitkontinuierlichen Funktion $x(t)$ und dem Spektrum $X_a(\omega)$ der abgetasteten Funktion $x_a(t)$ bzw. der zeitdiskreten Funktion $x[n]$ an.

 a) Vervollständigen Sie die Herleitung von (5.2.-9):
 Zeigen Sie, wie man vom letzten Ausdruck zuunterst auf der Seite 138 auf den Ausdruck auf der rechten Seite in (5.2.-9) kommt.
 (Druckfehler im Buch: Statt ω_0 sollte es ω_a heissen.)

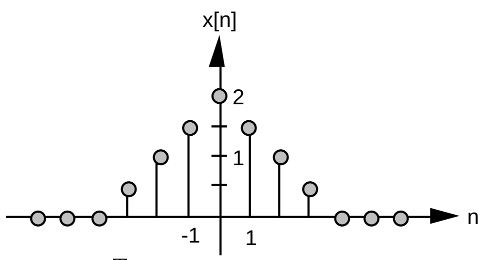
 b) Prüfen Sie die folgende Aussage nach:
 *"Wird ein **Signal abgetastet**, so wird sein **Spektrum periodisch fortgesetzt** mit der Abtastfrequenz ω_a und gewichtet mit der Abtastperiode T."* (*Meyer*, Seite 139)
 Stellen Sie dazu die Formel (5.2.-9) auf geeignete Weise grafisch dar.

2. Bestimmen Sie von Hand die Fourier-Transformierte $X_a(\omega)$ der zeitdiskreten Funktion $x[n]$:

 a)



 b)



 c) $x[n] = e^{-nT}\,\varepsilon[n]$, T = Abtastperiode

3. * Die Fourier-Transformierte $X_a(\omega)$ einer zeitdiskreten Funktion $x[n]$ ist im Allgemeinen gegeben durch

$$X_a(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jn\omega T} \qquad (\textit{Meyer}, \text{ Formel (5.2.-3), Seite 137})$$

 Diese Formel versagt jedoch, wenn die ursprüngliche zeitkontinuierliche Funktion **x(t) periodisch** ist.
 Die zeitdiskrete Funktion $x[n]$ konvergiert dann für $n \to \pm\infty$ nicht gegen 0, so dass die Summe nicht existiert.
 Es ist trotzdem möglich, auch in diesem Fall eine Fourier-Transformierte $X_a(\omega)$ zu bestimmen.
 Finden Sie einen Weg dazu.

Lösungen

1. a) Vorgehen:
   - Faltungsintegral formulieren
   - Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen
   - Integrale mit Delta-Funktion im Integranden ausführen

   b) ...

2. T = Abtastperiode, $\omega_a := \frac{2\pi}{T}$ = Abtastfrequenz

   a) $$X_a(\omega) = 1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} + e^{-j3\omega T} = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-j4\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} & (\omega \neq k \cdot \omega_a,\ k \in Z) \\ 4 & (\omega = k \cdot \omega_a,\ k \in Z) \end{cases}$$

   b) $$X_a(\omega) = 2 + 3\cos(\omega T) + 2\cos(2\omega T) + \cos(3\omega T)$$

   c) $$X_a(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-(1+j\omega)T}}$$

3. * 1. Möglichkeit

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta\big(\omega - k\omega_0\big) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0},\ T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

$$X_a(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\big(\omega - n\omega_a\big) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\big(\omega - k\omega_0 - n\omega_a\big) \right)$$

2. Möglichkeit (falls $x_a(t)$ periodisch mit der Grundfrequenz ω_{0a})
Fourier-Reihe von $x_a(t)$ mit den Fourier-Koeffizienten c_{ak}:

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ak}\, e^{jk\omega_{0a} t}$$

$$X_a(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{ak}\, \delta\big(\omega - k\omega_{0a}\big)$$