Übung 24 — Zeitdiskrete Funktionen
Abtastung, Abtastperiode

Lernziele

- aus der Angabe einer zeitkontinuierlichen Funktion und einer Abtastperiode die dazugehörige zeitdiskrete Funktion bestimmen können und umgekehrt.
- zeitdiskrete Funktionen grafisch darstellen können.
- verstehen, dass die Abtastung einer zeitkontinuierlichen Funktion mit verschiedenen Abtastperioden zu identischen zeitdiskreten Funktionen führen kann.

Aufgaben

1. Die zeitkontinuierliche Funktion x(t) wird mit der Abtastperiode T_A abgetastet, und man erhält die zeitdiskrete Funktion $x[n] = x(nT_A)$.
Geben Sie die Funktionsgleichung von x[n] an, d.h. x[n] = ...

a) $x(t) = \sin(t)$ $\qquad T_A = \frac{\pi}{2}$

b) $x(t) = \sin(3t)$ $\qquad T_A = \frac{2\pi}{9}$

c) $x(t) = \hat{x}\,\sin(\omega_0 t+\varphi)$ $\qquad T_A$ beliebig

d) $x(t) = 3\,\sin\left(4t - \frac{5\pi}{2}\right)$ $\qquad T_A = \frac{3\pi}{4}$

e) $x(t) = \cos(5t)$ $\qquad T_A = \frac{2\pi}{5}$

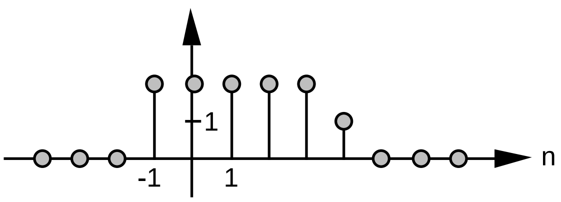
f) $x(t) = e^{-2t}\,\varepsilon(t)$ $\qquad T_A = 4$

2. Bearbeiten Sie für die gegebene zeitdiskrete Funktion x[n] die folgenden Teilaufgaben:

i) Zeichnen Sie den Grafen.
ii) Machen Sie je zwei Vorschläge für eine zeitkontinuierliche Funktion x(t) und eine Abtastperiode T_A, so dass die Abtastung von x(t) mit der Abtastperiode T_A gerade x[n] ergibt, d.h. $x[n] = x(nT_A)$.

a) $x[n] = \sin(\pi n)$ $\qquad$ b) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ $\qquad$ c) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

3. Die folgende Abbildung zeigt den Grafen der zeitdiskreten Funktion x[n]:



Zeichnen Sie die Grafen der folgenden Funktionen:

a) $x[n-2]$ $\qquad$ b) $x[4-n]$ $\qquad$ c) $x[2n]$

d) $x[2n+1]$ $\qquad$ e) $x[n]\cdot\varepsilon[2-n]$ $\qquad$ f) $x[n-1]\cdot\delta[n-3]$

g) $\frac{1}{2}\,x[n] + \frac{1}{2}\,(-1)^n\,x[n]$ $\qquad$ h) $x[n^2]$

4. (siehe Seite 2)

4. Gegeben ist eine zeitkontinuierliche, periodische Funktion x(t) mit der Grundperiode T_0.
x(t) soll nun mit verschiedenen Abtastperioden T_A abgetastet werden.

Tastet man x(t) mit der Abtastperiode T_{A1} ab, so erhält man die zeitdiskrete Funktion $x_1[n]$.
Tastet man x(t) mit der Abtastperiode T_{A2} ab, so erhält man die zeitdiskrete Funktion $x_2[n]$.
usw.

Im Allgemeinen erhält man bei verschiedenen Abtastperioden T_{A1} und T_{A2} auch verschiedene zeitdiskrete Funktionen $x_1[n]$ und $x_2[n]$.
Es ist jedoch möglich, dass zwei verschiedene Abtastperioden T_{A1} und T_{A2} zu zwei identischen zeitdiskreten Funktionen $x_1[n]$ und $x_2[n]$ führen, d.h. $x_1[n] \equiv x_2[n]$.

Finden Sie eine Beziehung zwischen T_{A1} und T_{A2}, damit $x_1[n] \equiv x_2[n]$ gilt.

Lösungen

1. a) $x[n] = \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$

   b) $x[n] = \sin\left(n\,\frac{2\pi}{3}\right)$

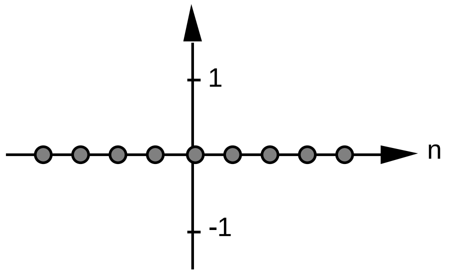
   c) $x[n] = \hat{x}\,\sin(\omega_0 T_A n + \phi)$

   d) $x[n] = 3\,\sin\left((6n-5)\,\frac{\pi}{2}\right) = 3\,(-1)^{n-1}$

   e) $x[n] \equiv 1$

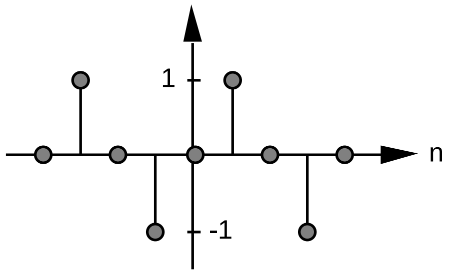
   f) $x[n] = e^{-8n}\,\varepsilon[n]$

2. a) i)



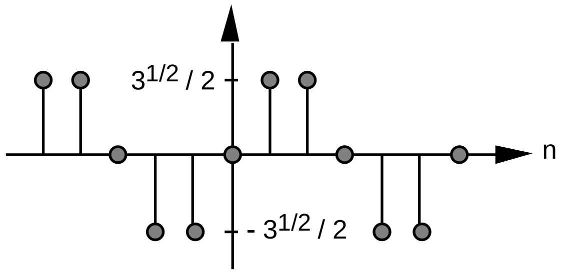
   ii) $x(t) = \sin(t)$, $T_A = \pi$ oder $x(t) = \sin(2t)$, $T_A = \frac{\pi}{2}$

   b) i)



   ii) $x(t) = \sin(t)$, $T_A = \frac{\pi}{2}$ oder $x(t) = \sin(2t)$, $T_A = \frac{\pi}{4}$

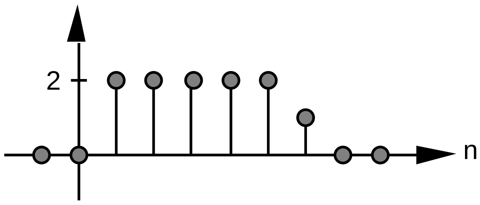
   c) i)



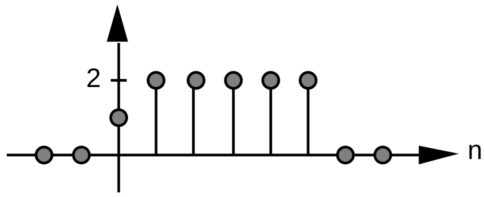
   ii) $x(t) = \sin(t)$, $T_A = \frac{\pi}{3}$ oder $x(t) = \sin(2t)$, $T_A = \frac{\pi}{6}$

3. (siehe Seite 4)

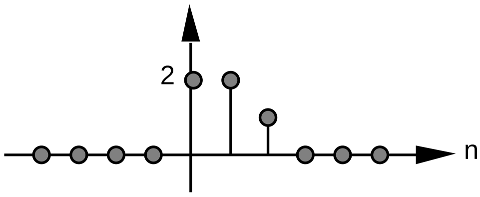
3. a)



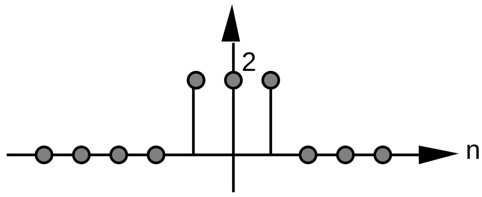
b)



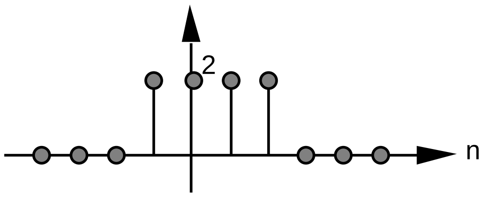
c)



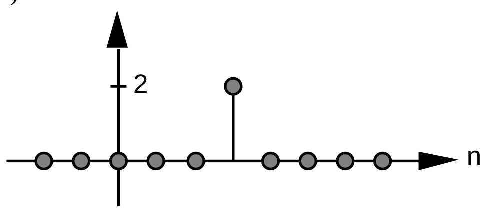
d)



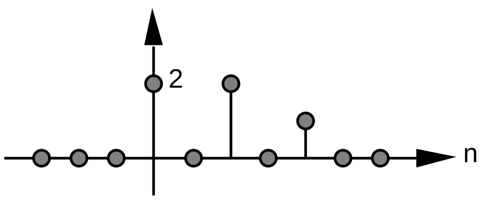
e)



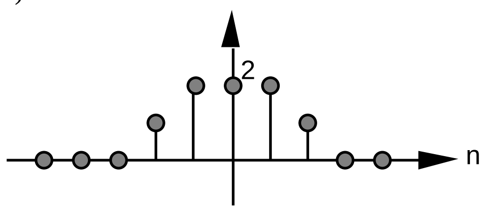
f)



g)



h)



4. $T_{A2} = T_{A1} + k \cdot T_0 \ \ (k \quad Z)$