Übung 23 Laplace-Transformation
Anwendungen bei LTI-Systemen

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- mit Hilfe der Übertragungsfunktion beurteilen können, ob ein kausales LTI-System stabil ist oder nicht.
- aus der Übertragungsfunktion eines kausalen LTI-Systems die Stossantwort bestimmen können.
- verstehen, dass bei einer gebrochen rationalen Übertragungsfunktion eines LTI-Systems jeder reelle Pol einem zeitlich exponentiell verlaufenden Summanden in der Stossanwort entspricht.
- mit Hilfe der Faltungseigenschaft der Laplace-Transformation den Output eines LTI-Systems aus dem Input bestimmen können.
- die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems aus einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten bestimmen können, welche den Input und den Output des LTI-Systems verknüpft.
- aus der Übertragungsfunktion den Frequenzgang eines LTI-Systems bestimmen können.

Aufgaben

1. Gegeben ist die gebrochen rationale Übertragungsfunktion H(s) eines kausalen LTI-Systems.

   i) Beurteilen Sie, ob das LTI-System stabil ist oder nicht.
   ii) Bestimmen Sie die Stossantwort h(t).
   iii) Beurteilen Sie, ob die Stossantwort h(t) absolut integrierbar ist oder nicht.

   Hinweis: Wenn Sie unter i) zum Schluss gekommen sind, dass das LTI-System stabil ist, dann müssten Sie unter iii) zum Ergebnis kommen, dass h(t) absolut integrierbar ist und umgekehrt.

   iv) Stellen Sie fest, dass jeder reelle und einfache Pol s_k in der Übertragungsfunktion H(s) einem Summanden der Form $e^{-s_k t}\,\varepsilon(t)$ in der Stossantwort h(t) entspricht.

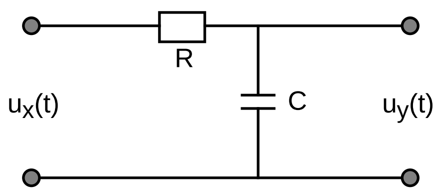
   a) $H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$ b) $H(s) = \frac{2s+8}{s^2+4s+3}$

   c) $H(s) = \frac{3s^2+4s+2}{s^3+3s^2+2s}$

2. Betrachten Sie ein kausales LTI-System mit dem Input $x(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$ und der Stossantwort $h(t) = e^{-2t}\,\varepsilon(t)$.

   a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten von x(t) und h(t).
   b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltungseigenschaft die Laplace-Transformierte Y(s) des Outputs y(t).
   c) Bestimmen Sie y(t) aus der in b) ermittelten Laplace-Transformierten von y(t).
   d) Kontrollieren Sie das Ergebnis aus c), indem Sie y(t) durch die Faltung von x(t) und h(t) bestimmen.
   e) Beurteilen Sie, ob das LTI-System stabil ist oder nicht.

3. Gegeben ist ein System bestehend aus einem RC-Kreis (vgl. Übung 19, Aufgabe 7):



(Fortsetzung Seite 2)

Im Unterricht wurde gezeigt, dass der Input $u_x(t)$ und der Output $u_y(t)$ durch die folgende Differentialgleichung verknüpft sind:

$$RC\,\frac{du_y}{dt}(t) + u_y(t) = u_x(t)$$

Es wird nun angenommen, dass das System ein kausales LTI-System sei.

a) Bestimmen Sie den algebraischen Ausdruck für die Übertragungsfunktion H(s) des LTI-Systems.
b) Skizzieren Sie das zu H(s) gehörige Pol-Nullstellen-Diagramm.
c) Geben Sie den Konvergenzbereich von H(s) an.
d) Beurteilen Sie, ob das LTI-System stabil ist oder nicht.
e) Bestimmen Sie die Stossantwort h(t).
f) Bestimmen Sie den zum Input $u_x(t) = \hat{u}_x \sin(\omega_0 t)$ gehörigen Output $u_y(t)$.

4. Ein kausales LTI-System sei beschrieben durch eine lineare Differentialgleichung, welche den Input x(t) und den dazugehörigen Output y(t) verknüpft.

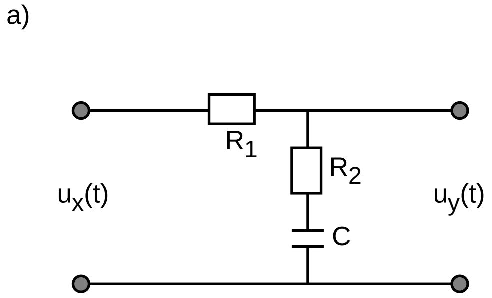
Bearbeiten Sie je die folgenden Teilaufgaben:
i) Bestimmen Sie den algebraischen Ausdruck für die Übertragungsfunktion H(s) des LTI-Systems.
ii) Skizzieren Sie das zu H(s) gehörige Pol-Nullstellen-Diagramm.
iii) Geben Sie den Konvergenzbereich von H(s) an.
iv) Beurteilen Sie, ob das LTI-System stabil ist oder nicht.
v) Bestimmen Sie die Stossantwort h(t).
vi) Geben Sie den Frequenzgang H(jω) des LTI-Systems an.
vii) Beurteilen Sie, um welchen Faktor k die Amplitude eines sinus-förmigen Signals der Frequenz ω_0:=1 beim Durchgang durch das LTI-System vergrössert wird.

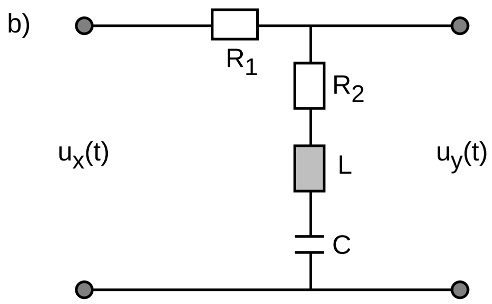
a) $\frac{dy}{dt}(t) + 3\,y(t) = x(t)$

b) $\frac{d^2y}{dt^2}(t) - \frac{dy}{dt}(t) - 2\,y(t) = x(t)$

c) $\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\,\frac{dy}{dt}(t) + 3\,y(t) = \frac{dx}{dt}(t) + 2\,x(t)$

5. * Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen H(s) der folgenden LTI-Systeme:





Anleitung:

- Kirchhoff'sche Gesetze
- $u_R = R\cdot i$, $u_C = \frac{1}{C}\cdot q$, $u_L = L\cdot\frac{di}{dt}$
- Ziel: $H(s) = \frac{U_y(s)}{U_x(s)}$ finden

Lösungen

1. a) i) nicht stabil
   ii) $h(t) = \frac{1}{3}\left(2e^{-t} + e^{2t}\right) \varepsilon(t)$
   iii) h(t) nicht absolut integrierbar
   iv) ...

   b) i) stabil
   ii) $h(t) = \left(3e^{-t} - e^{-3t}\right) \varepsilon(t)$
   iii) h(t) absolut integrierbar
   iv) ...

   c) i) nicht stabil
   ii) $h(t) = \left(1 - e^{-t} + 3e^{-2t}\right) \varepsilon(t)$
   iii) h(t) nicht absolut integrierbar
   iv) ...

2. a) $X(s) = \frac{1}{s+1}$, $\text{Re}(s) > -1$
   $H(s) = \frac{1}{s+2}$, $\text{Re}(s) > -2$
   b) $Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, $\text{Re}(s) > -1$
   c) $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$
   d) ...
   e) stabil

3. a) $H(s) = \frac{1}{RCs+1}$
   b) keine Nullstellen, Polstelle bei $s = -\frac{1}{RC}$
   c) $\text{Re}(s) > -\frac{1}{RC}$
   d) stabil
   e) $h(t) = \frac{1}{RC}\, e^{-(1/RC)t}\, \varepsilon(t)$
   f) $u_y(t) = |H(j\omega_0)|\, \hat{u}_x \sin\left(\omega_0 t + \arg\left(H(j\omega_0)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(RC\omega_0\right)^2}}\, \hat{u}_x \sin\left(\omega_0 t - \arctan(RC\omega_0)\right)$

4. a) i) $H(s) = \frac{1}{s+3}$
   ii) keine Nullstellen, Polstelle bei $s = -3$
   iii) $\text{Re}(s) > -3$
   iv) stabil
   v) $h(t) = e^{-3t}\, \varepsilon(t)$
   vi) $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$
   vii) $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9+\omega^2}}$
   $k = |H(j\cdot 1)| = \frac{1}{\sqrt{10}}$

   b) i) $H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$
   ii) keine Nullstellen, Polstellen bei $s_1 = -1$, $s_2 = 2$

iii) $Re(s) > 2$

iv) nicht stabil

v) $H(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1}$

$h(t) = \frac{1}{3} (e^{2t}-e^{-t})\ \varepsilon(t)$

vi) $H(j\omega)$ existiert nicht

vii) -

c) i) $H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$

ii) Nullstelle bei $s = -2$, Polstellen bei $s_1 = -3$, $s_2 = -1$

iii) $Re(s) > -1$

iv) stabil

v) $H(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}$

$h(t) = \frac{1}{2} (e^{-t}-e^{-3t})\ \varepsilon(t)$

vi) $H(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$

vii) $|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{4+\omega^2}{9+10\omega^2+\omega^4}}$

$k = |H(j\cdot 1)| = \frac{1}{2}$

5. * a) $H(s) = \frac{R_2Cs+1}{(R_1+R_2)Cs+1}$

b) $H(s) = \frac{LCs^2+R_2Cs+1}{LCs^2+(R_1+R_2)Cs+1}$