

Übung 21 Laplace-Transformation Bestimmung der Laplace-Transformierten / -Rücktransformierten

Lernziele

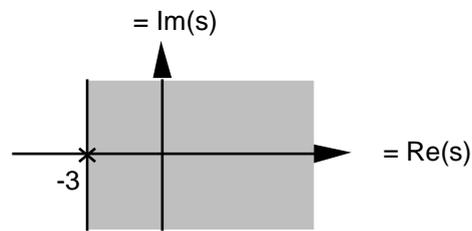
- die Laplace-Transformierte einer einfacheren Funktion von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln bestimmen können.
- das Pol-Nullstellen-Diagramm einer Laplace-Transformierten skizzieren können.
- aus der Laplace-Transformierten einer Funktion deren Fourier-Transformierte bestimmen können.
- die zu einer Laplace-Transformierten gehörige Rücktransformierte mit Hilfe von Transformationstabellen und der Methode der Partialbruchzerlegung bestimmen können.

Aufgaben

- Lösen Sie für die gegebene Funktion $x(t)$ die folgenden Teilaufgaben:
 - Skizzieren Sie den Grafen von $x(t)$
 - Bestimmen Sie die zu $x(t)$ gehörige Laplace-Transformierte $X(s)$ von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln.
 - Skizzieren Sie das zu $X(s)$ gehörige Pol-Nullstellen-Diagramm.
 - Geben Sie die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ an, falls sie existiert.
 - $x(t) = e^{-3t} \cdot (t)$
 - $x(t) = e^{-3t} \cdot (-t)$
 - $x(t) = e^{2t} \cdot (t)$
 - $x(t) = e^{2t} \cdot (-t)$
 - $x(t) = (t)$
 - $x(t) = (t-t_0)$
 - $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cdot (t-kT)$
 - $x(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot (t)$
- Bestimmen Sie die zur Laplace-Transformierten $X(s)$ gehörige Rücktransformierte $x(t)$. Benützen Sie dazu die Laplace-Transformationstabelle (kopiertes Blatt) und, falls nötig, die Methode der Partialbruchzerlegung.
 - $X(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{Re}(s) > -1$
 - $X(s) = \frac{s}{s^2+4} \quad \text{Re}(s) > 0$
 - $X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \quad \text{Re}(s) > -2$
 - $X(s) = \frac{s^2-s+1}{(s+1)^2} \quad \text{Re}(s) > -1$

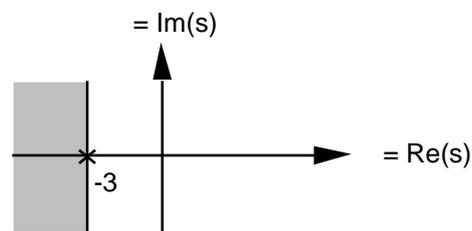
Lösungen

1. a) i) ...
 ii) $X(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{Re}(s) > -3$
 iii)



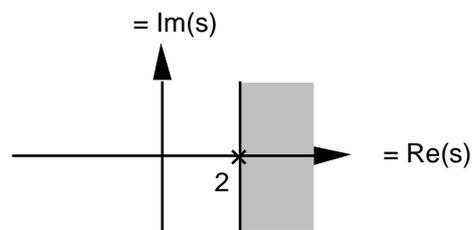
iv) $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$

- b) i) ...
 ii) $X(s) = -\frac{1}{s+3} \quad \text{Re}(s) < -3$
 iii)



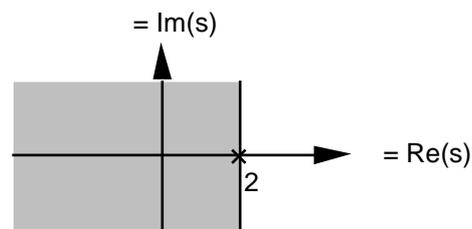
iv) $X(j\omega)$ existiert nicht

- c) i) ...
 ii) $X(s) = \frac{1}{s-2} \quad \text{Re}(s) > 2$
 iii)



iv) $X(j\omega)$ existiert nicht

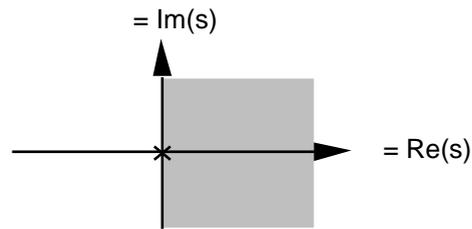
- d) i) ...
 ii) $X(s) = -\frac{1}{s-2} \quad \text{Re}(s) < 2$
 iii)



iv) $X(j\omega) = -\frac{1}{j\omega - 2}$

- e) i) ...
 ii) $X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0$

iii)



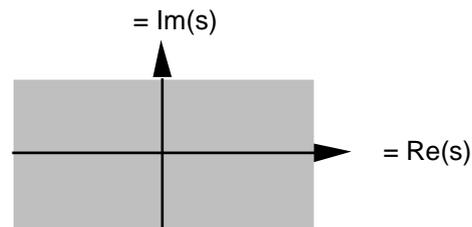
iv) $X(j\omega)$ existiert nicht

f)

i) ...

ii) $X(s) = e^{-st_0}$ alle s

iii)



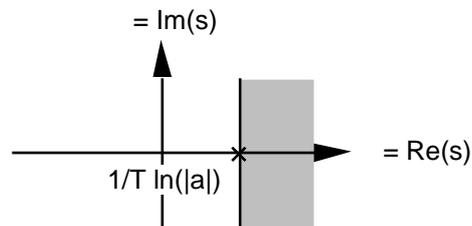
iv) $X(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$

g)

i) ...

ii) $X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (a \cdot e^{-sT})^k = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-sT}}$ $\text{Re}(s) > \frac{1}{T} \ln(|a|)$

iii)



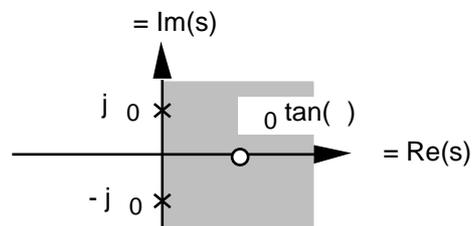
iv) $X(j\omega)$ existiert für $|a| > 1$.
 $X(j\omega)$ existiert nicht für $|a| \leq 1$.

h)

i) ...

ii) $X(s) = \frac{s \cdot \cos(\omega_0) - \omega_0 \sin(\omega_0)}{s^2 + \omega_0^2}$ $\text{Re}(s) > 0$

iii)



iv) $X(j\omega)$ existiert nicht

2.

a) $x(t) = e^{-t} u(t)$

b) $x(t) = \cos(2t) u(t)$

c) $x(t) = (2e^{-3t} - e^{-2t}) u(t)$

d) $x(t) = t u(t) + 3(t-1)e^{-t} u(t)$