Übung 20 Laplace-Transformation
Einführung, Vergleich mit Fourier-Transformation

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die Laplace-Transformierte einer einfacheren Funktion von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln bestimmen können.
- verstehen, dass der algebraische Ausdruck allein die Laplace-Transformierte einer Funktion nicht vollständig beschreibt.
- Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der Laplace- und der Fourier-Transformierten einer Funktion kennen.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (t,a R und s C):

a) $\lim\limits_{t \to 0} e^{-(s+a)t}$

b) $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-(s+a)t}$

c) $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{-(s+a)t}$

Hinweise:
- Beachten Sie, dass s eine komplexe Grössen ist.
- Spalten Sie s in Real- und Imaginärteil auf, d.h. $s = \sigma + j\omega$.

2. Gegeben sind die beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$x_1(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t)$ (a R beliebig)
$x_2(t) = -e^{-at}\,\varepsilon(-t)$ (a R beliebig)

a) Skizzieren Sie die Grafen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für die drei Fälle a>0, a=0, a<0.

b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $X_1(s)$ von $x_1(t)$.
Gehen Sie von der Definition der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das Integral von Hand. Benützen Sie dabei die Resultate aus der Aufgabe 1.

c) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $X_2(s)$ von $x_2(t)$.
Gehen Sie von der Definition der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das Integral von Hand. Benützen Sie dabei die Resultate aus der Aufgabe 1.

d) Vergleichen Sie die Laplace-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
Finden Sie eine Gemeinsamkeit und einen Unterschied.

e) Welche Angaben sind nötig, um die Laplace-Transformierte einer Funktion vollständig zu beschreiben?

3. Gegeben ist die Funktion x(t):

$x(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t)$ (a R\{0})

a) Geben Sie die Laplace-Transformierte X(s) von x(t) an (siehe Aufgabe 2a).

b) Geben Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von x(t) an (siehe Fourier-Transformations-Tabelle).
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle a>0 und a<0.

c) (siehe Seite 2)

c) Beurteilen Sie mit Hilfe der Resultate aus a) und b) die folgende Aussage:
"Die Laplace-Transformierte existiert für eine grössere Klasse von Funktionen als die Fourier-Transformierte."

d) Sowohl die Fourier- als auch die Laplace-Transformierte von $x(t)$ wird mit X bezeichnet, also $X(\omega)$ bzw. $X(s)$.
Erklären Sie, warum es genau genommen mathematisch unkorrekt ist, für beide Transformierten die gleiche Bezeichnung X zu verwenden.

e) Vergleichen Sie die Laplace-Transformierte $LT(x(t))$ mit der Fourier-Transformierten $FT(x(t))$.
Versuchen Sie, ohne Hilfe von Unterlagen einen Zusammenhang zwischen $LT(x(t))$ und $FT(x(t))$ zu finden.

Lösungen

1. a) $\lim\limits_{t \to 0} e^{-(s+a)t} = 1$

b) $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & (\sigma+a>0) \\ 1 & (\sigma+a=0 \quad \omega=0) \\ \text{existiert nicht} & \big((\sigma+a=0 \quad \omega\neq 0) \quad (\sigma+a<0)\big) \end{cases}$

c) $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & (\sigma+a<0) \\ 1 & (\sigma+a=0 \quad \omega=0) \\ \text{existiert nicht} & \big((\sigma+a=0 \quad \omega\neq 0) \quad (\sigma+a>0)\big) \end{cases}$

2. a) ...

b) $X_1(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+a} & \big(\mathrm{Re}(s)>-a\big) \\ \text{nicht definiert} & \big(\mathrm{Re}(s)\leq -a\big) \end{cases}$

c) $X_2(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+a} & \big(\mathrm{Re}(s)<-a\big) \\ \text{nicht definiert} & \big(\mathrm{Re}(s)\geq -a\big) \end{cases}$

d) Gemeinsamkeit: Algebraischer Ausdruck
Unterschied: Konvergenzbereich, d.h. Angabe, für welche s die Laplace-Transformierte existiert

e) Algebraischer Ausdruck: X(s) = ...
Konvergenzbereich: Re(s) < ... bzw. Re(s) > ...

3. a) $X(s) = \mathrm{LT}\big(x(t)\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+a} & \big(\mathrm{Re}(s)>-a\big) \\ \text{nicht definiert} & \big(\mathrm{Re}(s)\leq -a\big) \end{cases}$

b) $X(\omega) = \mathrm{FT}\big(x(t)\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{j\omega+a} & (a>0) \\ \text{nicht definiert} & (a<0) \end{cases}$

c) Die Aussage ist richtig.
a>0: x(t) besitzt sowohl eine Laplace- als auch eine Fourier-Transformierte.
a<0: x(t) besitzt eine Laplace-, jedoch keine Fourier-Transformierte.

d) Die Funktion $f: \omega \to \dfrac{1}{j\omega+a}$ ist nicht die gleiche wie die Funktion $g: s \to \dfrac{1}{s+a}$
Die Funktion f besteht aus drei Operationen, die nacheinander ausgeführt werden:
- Multiplikation mit j
- Addition mit a
- Bildung des Kehrwertes

Die Funktion g besteht nur aus zwei Operationen:
- Addition mit a
- Bildung des Kehrwertes

e) $\mathrm{FT}\big(x(t)\big) = \Big[\mathrm{LT}\big(x(t)\big)\Big]_{s=j\omega}$