Übung 18 — Fourier-Transformation Faltung

Lernziele

- wissen, wie die Faltung zweier Funktionen definiert ist.
- wissen, dass die Faltung das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz erfüllt.
- sich das Faltungsintegral zweier Funktionen grafisch vorstellen können.
- die Faltung zweier einfacher Funktionen grafisch ausführen können.
- einen einfachen theoretischen Sachverhalt beweisen können.

Einleitung

Die Faltung zweier Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist wie folgt definiert:

$$x_1(t) * x_2(t) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

Die Faltung erfüllt die folgenden Rechengesetze:

Kommutativgesetz: $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

Assoziativgesetz: $\left(x_1(t) * x_2(t)\right) * x_3(t) = x_1(t) * \left(x_2(t) * x_3(t)\right)$

Distributivgesetz: $x_1(t) * \left(x_2(t) + x_3(t)\right) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

Aufgaben

1. Veranschaulichen Sie sich das Faltungsintegral

$$x_1(t) * x_2(t) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

anhand der beiden konkreten Funktionen

$x_1(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t) \quad (a>0)$

$x_2(t) = \varepsilon(t)$

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

a) Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Funktionen:

i) $\tau \to x_1(\tau)$

ii) $\tau \to x_2(\tau)$

iii) $\tau \to x_2(-\tau)$

iv) $\tau \to x_2(t-\tau)$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $t>0$ und $t<0$.

v) $\tau \to x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle $t>0$ und $t<0$.

b) Finden Sie mit Hilfe der Grafen aus a) eine geometrische Veranschaulichung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

2. (siehe Seite 2)

2. Die Funktion y(t) sei definiert als Faltung der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t)$$

i) Skizzieren Sie die Grafen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

ii) Bestimmen Sie y(t) auf grafische Weise, d.h. nach dem in der Aufgabe 1 aufgezeigten grafischen Vorgehen.

iii) Skizzieren Sie den Grafen von y(t).

a) $$x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le 1) \\ 0 & (t<0 \quad t>1) \end{cases}$$

b) $$x_1(t) = \varepsilon(t)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} t & (0 \le t \le 1) \\ 0 & (t<0 \quad t>1) \end{cases}$$

c) * $$x_1(t) = \begin{cases} t & (0 \le t \le 1) \\ -t+2 & (1 \le t \le 2) \\ 0 & (t<0 \quad t>2) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le 2) \\ 0 & (t<0 \quad t>2) \end{cases}$$

3. Beweisen Sie das Kommutativgesetz der Faltung.

Hinweis:
Führen Sie im Faltungsintegral eine geeignete Substitution durch.

4. * Im Unterricht wurde gezeigt, dass die Faltung einer Funktion x(t) mit der Dirac'schen Delta-"Funktion" $\delta(t)$ die Funktion x(t) selbst ergibt:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\ d\tau = x(t)$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage direkt aus der Ausblendeigenschaft der Dirac'schen Delta-"Funktion" $\delta(t)$ folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \delta(t-t_0)\ dt = x(t_0)$$

Lösungen

1. a) ...

b) $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$

ist die Fläche zwischen dem Grafen der Funktion $\tau \rightarrow x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)$ und der τ-Achse.

2. a) i) ...

ii) $y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0 \quad t>2) \\ t & (0 \le t \le 1) \\ -t+2 & (1 \le t \le 2) \end{cases}$

iii) ...

b) i) ...

ii) $y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ \frac{t^2}{2} & (0 \le t \le 1) \\ \frac{1}{2} & (t>1) \end{cases}$

iii) ...

c) * i) ...

ii) $y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & (0 \le t \le 1) \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1 & (1 \le t \le 3) \\ \frac{t^2}{2} - 4t + 8 & (3 \le t \le 4) \\ 0 & (t<0 \quad t>4) \end{cases}$

iii) ...

3. $$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau && \Big|\ \text{Substitution } s := t - \tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-s)\, x_2(s)\, (-ds) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-s)\, x_2(s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(s)\, x_1(t-s)\, ds \\ &= x_2(t) * x_1(t) \end{aligned}$$

4. * $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t-t_0)\, dt &= x(t_0) && \Big|\ \text{Namensänderung } t_0 \rightarrow \tau \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t-\tau)\, dt &= x(\tau) && \Big|\ \text{Namensänderung } t \leftrightarrow \tau \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(\tau-t)\, d\tau &= x(t) && \Big|\ \delta(\tau-t) = \delta(t-\tau) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau &= x(t) \end{aligned}$$